

Tres problemas de probabilidad geométrica.

Ricardo Miró

Consejo de la Magistratura de la Nación
Área de Procesamiento de Datos

1. Introducción.

Este artículo tratará de describir informalmente algunas de las ideas vinculadas con la noción clásica de probabilidad y una importante generalización de la misma.

Si tenemos una urna con 3 bolillas rojas y 2 negras, se dice que la probabilidad de sacar una bolilla roja es $\frac{3}{5}$ y que la probabilidad de sacar una bolilla negra es $\frac{2}{5}$. Esta idea es completamente intuitiva, y responde a lo establecido por Laplace. Su famosa definición consigna que si se pueden determinar los casos posibles Cp de un determinado experimento aleatorio (cantidad de bolillas) y los casos Cf favorables del mismo (cantidad de bolillas de un color elegido de antemano), entonces la probabilidad de un suceso se determina mediante el cociente

$$p = \frac{Cf}{Cp}$$

Supongamos ahora el siguiente problema: se tienen tres recintos de forma irregular, cada uno de ellos dentro de tres rectángulos congruentes, tal como lo ilustra la Fig. 1.

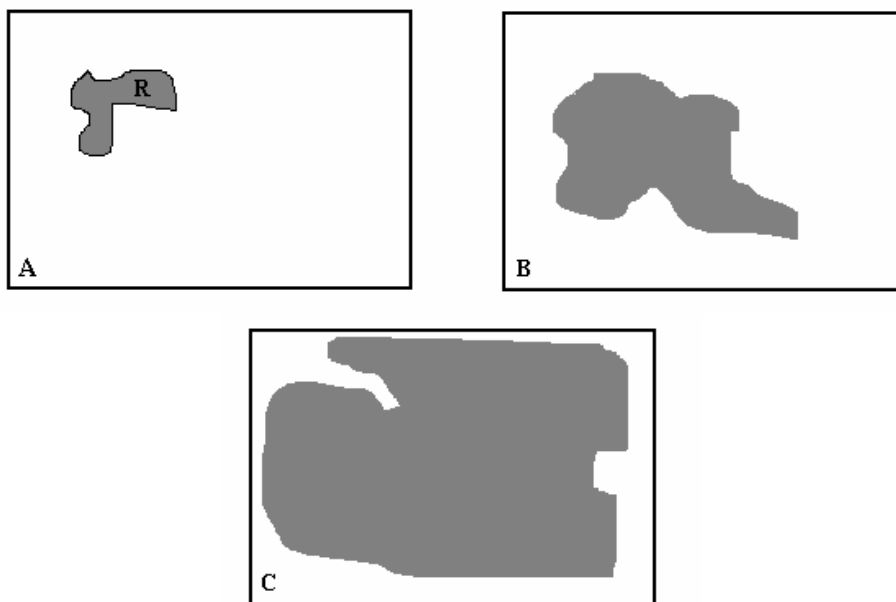


Fig. 1: Tres recintos de contorno irregular dentro de un rectángulo de igual área..

Imaginemos ahora el siguiente experimento aleatorio: Se elige al azar un punto dentro de cada uno de los rectángulos A, B y C y se pide hallar, en cada caso, *la*

probabilidad de que el punto elegido esté ubicado dentro del recinto irregular respectivo. Llamaremos S a este preciso suceso aleatorio.

Es fácil comprender que el problema planteado tiene bastante sentido, pues se verificará sin demasiado esfuerzo, que será más fácil acertar al recinto del rectángulo C que al recinto del rectángulo A . Por su parte, el acierto al recinto del rectángulo B ofrecerá una dificultad intermedia.

Por supuesto, la definición de Laplace no tiene lugar en este tipo específico de problema. Sin embargo, restringiéndonos al recinto R del rectángulo A , la probabilidad buscada se determina mediante la siguiente definición:

$$p(S) = \frac{\text{área}(R)}{\text{área}(A)} \quad (1)$$

Como resultará obvio, una definición similar se adoptará para los recintos de los restantes casos. Ahora bien: determinar el área del rectángulo A constituye una operación inmediata, mientras que no sucede lo mismo para el área del recinto R . Al respecto, las observaciones siguientes son muy intuitivas y cruciales:

- i) Si se repite un gran número N de veces la operación de elegir al azar un punto del rectángulo, contándose las veces Cf en las que el punto cae dentro del recinto A , entonces el cociente $\frac{Cf}{N}$ será una aproximación muy aceptable de la probabilidad del suceso S .
- ii) En virtud de la experiencia triple descrita en la Fig. 1, y utilizando la expresión dada en (1), el producto $\frac{Cf}{N} \cdot \text{área}(R)$ será asimismo una aproximación muy aceptable del área del recinto A .

El problema descrito constituye apenas un ejemplo de lo que se entiende por *probabilidad geométrica*. Por otra parte, los pasos i) y ii) especificados más arriba constituyen la esencia del llamado *método de Montecarlo*, que en las aplicaciones concretas tales como las tareas de agrimensura, ofrecen frecuentemente más ventajas operativas que los métodos deterministas.

Según nos comenta el Dr. Santaló [4], fue el naturalista francés conde Georges Louis Leclerc de Buffon (1707-1788), uno de los primeros en trabajar con el concepto de probabilidad geométrica, tal como se establece a partir de (1). En su monumental tratado *Historie Naturelle* de 44 volúmenes -que sus ayudantes terminaron de compilar en 1804- Buffon dejó sentadas además las bases para el estudio de varios capítulos en Biología, Zoología y Anatomía Comparada [1].

2. Un problema de Encuentros.

El siguiente problema ha sido extraído del clásico libro escrito por el profesor Ríos [2], y se espera que ilustre correctamente el espíritu de las ideas expuestas en la introducción.

Un chico invita a una chica, citándola en un bar entre las 18 y 19 horas. El joven galán tiene fama de impuntual, y la bella niña (que está advertida de esta circunstancia) acepta la propuesta, pero con la condición de no esperarlo más de 10 minutos. Ambos se despiden entendiéndose que esta última cláusula vale para los dos por igual. Se pide entonces hallar *la probabilidad de que los dos chicos rebeldes se encuentren efectivamente*.

A partir de la propuesta aceptada por ambos jóvenes, se desprende que si el par ordenado (x,y) representa los instantes de llegada de ambos, dicho par puede ocupar cualquier punto del cuadrado de lado 60 con igual probabilidad. En términos de la teoría subyacente, esto dice que el par (x, y) considerado como una variable aleatoria bidimensional, está gobernado por la distribución uniforme [2]. Ahora bien: la condición de espera máxima pactada por ambos se puede caracterizar de manera muy cómoda mediante la desigualdad $|x - y| < 10$, que define una cierta subregión del cuadrado de lado 60, tal como se ilustra en la Fig. 2.

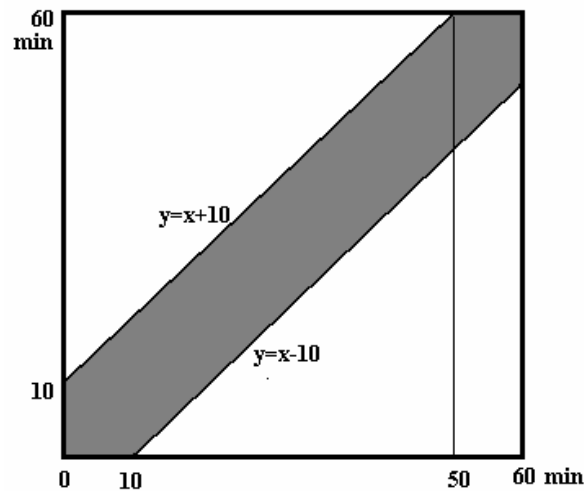


Fig. 2 : La región grisada señala todos los valores del vector aleatorio (x,y) que permitirán el encuentro de los chicos.

Mediante un cuidadoso análisis de la Fig. 1, se observará que el área de la región grisada puede expresarse de inmediato como

$$\int_0^{10} (x+10) dx + \int_{10}^{50} [(x+10) - (x-10)] dx + \int_{50}^{60} [60 - (x-10)] dx = 11000$$

Luego, considerando que el cuadrado continente tiene un área de 3600, la probabilidad p pedida se expresará como

$$p = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$$

3. La aguja del conde de Buffon.

Construyamos una red de 10 segmentos de recta paralelos, equidistantes en una unidad D . Tomemos además una aguja cuya longitud l sea menor que D . Un bosquejo de tal sistema se ofrece en la Fig.3.



Fig. 3 : Red de paralelas de Buffon con su aguja.

La tarea que encararemos a continuación será determinar *la probabilidad de que la aguja corte o toque a una paralela de la red, si es arrojada en ella al azar*. Para tal fin aislemos un par de paralelas, tal como en la Fig. 4, y determinemos el punto medio P de la aguja. Sea d su distancia a la paralela más próxima, y sea α el ángulo que forma la aguja o su prolongación con la paralela.

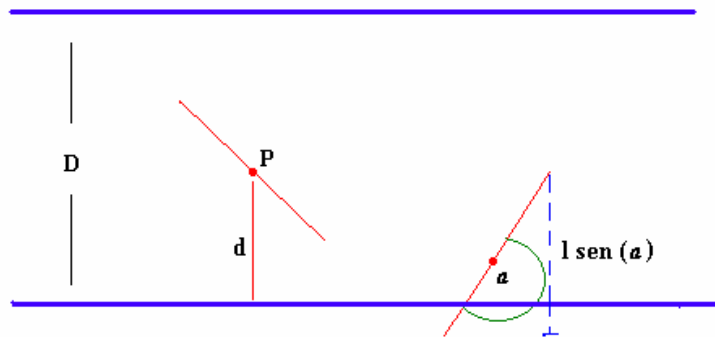


Fig. 4: Constantes y variables aleatorias en la aguja de Buffon.

Bajo las condiciones establecidas, es inmediato ver que la condición

$$l \cdot \text{sen}(\alpha) > d \quad (2)$$

es necesaria y suficiente para que la aguja corte a la paralela.

Por lo tanto, resultará esencial observar que si la aguja es arrojada al azar a la red de paralelas de Buffon [2],[5], el valor numérico del ángulo α estará en el intervalo

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad (3)$$

mientras que el valor de la longitud d podrá tomar todos los valores del intervalo

$$0 < d < D \quad (4)$$

Luego, lo que las condiciones (3) y (4) establecen es que, considerado como variable aleatoria, el par (α, d) es un elemento cualquiera del rectángulo $[0, \pi] \times [0, D]$. Ahora bien: la condición de corte (1), a su vez establece que en tal caso, el par (α, d) estará ubicado debajo del lóbulo de la senoide $f(\alpha) = l \cdot \text{sen}(\alpha)$, tal como se observa en la Fig. 5:

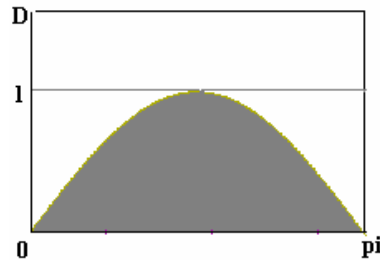


Fig. 5: El lóbulo sinusoidal $l \text{sen}(x)$ como región de corte en el cuadrado $[0, \pi] \times [0, D]$

Luego, al tener en cuenta la definición de probabilidad geométrica dada en (1), así como las consideraciones i) y ii) siguientes, la probabilidad p de que una aguja corte a una paralela será el cociente entre el *área de la senoide grisada* sobre el *área del rectángulo continente*, es decir:

$$p = \frac{\int_0^{\pi} l \text{sen}(\alpha) d\alpha}{\pi D}$$

La probabilidad anterior queda entonces determinada mediante una integral de Análisis I, fácilmente resoluble, a través de la cual se obtiene el resultado

$$p = \frac{2l}{\pi D} \quad (5)$$

Ahora bien, lo que de entrada llamó la atención a los estudiosos es que la expresión (5) permite diseñar un experimento aleatorio para determinar aproximadamente π . En

efecto, si p se reemplaza en (5) por el valor empírico $\frac{N_c}{N}$, (cociente entre el número de cortes de la aguja sobre el número total de tiradas), se obtiene que

$$\pi \approx \frac{2IN_c}{ND} \quad (6)$$

Una sencilla simulación en PC permite comprobar que la aproximación (6) es correcta, tal como se ilustra en la Fig. 6.

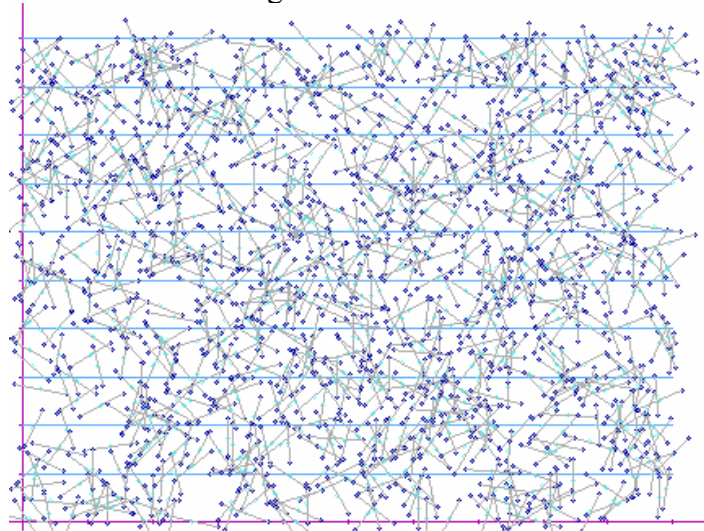


Fig.6: 1000 agujas simuladas arrojadas sobre una red de Buffon dieron la aproximación $\pi = 3.1475$

Corrientemente, no se obtienen aproximaciones con dos dígitos correctos para un número tan bajo de tiradas, pero trabajando con varias tiradas del mismo tenor se obtuvo el resultado señalado.

4. Una aplicación del problema de Buffon a la Cartografía.

Supongamos que al ingresar en una determinada región llana, el río Loco desarrolla su curso mediante una intrincada trayectoria a base de meandros, tal como lo ilustra la Fig. 7.

Supongamos que al ingresar en una determinada región llana, el río Loco desarrolla su curso mediante una intrincada trayectoria a base de meandros, tal como lo ilustra la Fig. 7.

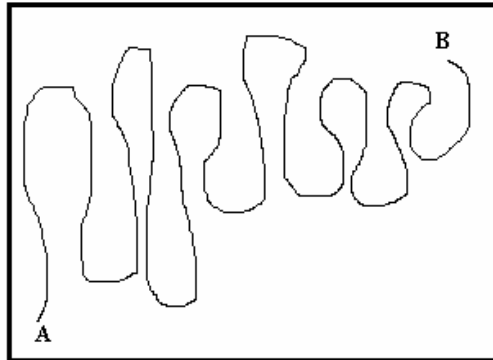


Fig. 7: Curso parcial del río Loco.

Al respecto, un equipo de cartógrafos ha recibido la misión de determinar la longitud del río, pero entre todos observan desesperanzados que en la región, las características del curso complican enormemente la tarea. Un integrante del equipo, sin embargo, suspira aliviado y recuerda vagamente haber visto la descripción de un problema parecido en el ya citado libro del Dr. Santaló [4].

En vez de un curso de río con meandros, consideremos una versión simplificada del mismo representada por una poligonal construida sobre nodos p_k del río, en donde supondremos que la distancia internodos $[p_k, p_{k+1}]$ es menor que la norma D de la red de paralelas de Buffon disponible (Fig. 8)

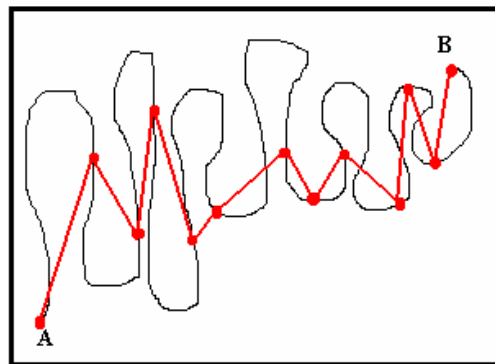


Fig. 8: Poligonal generada con nodos sobre el curso del río Loco.

Se arroja ahora la poligonal una vez sobre la red de Buffon, y se toman en cuenta las veces n_k que la poligonal corta a alguna paralela de la red. Se repite luego la experiencia N veces. Tal como resultará obvio, el valor \bar{x} de dicha experiencia será

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^N n_k}{N}$$

(7)

Ahora bien, llamando $n(a_k)$ la cantidad de cortes producidos sobre la red por cada segmento k correspondiente, se tendrá asimismo que

$$\frac{\sum_{k=1}^N n_k}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N n(a_k)}{N}$$

(8)

Luego, como cada segmento de la poligonal actúa por sí solo como una aguja de Buffon, para cada sumando del segundo miembro de (8) se tendrá que

$$\frac{n(a_k)}{N} \approx \frac{2 \cdot a_k}{\pi D}$$

(9)

Pero entonces, al tener en cuenta (9) y sumando todas las igualdades aproximadas se tendrá que el valor medio experimental puede representarse aproximadamente como

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^N 2 \cdot a_k}{\pi D} = \frac{2L_p}{\pi D}$$

(10)

de donde la longitud de la poligonal puede expresarse como

$$L_p \approx \frac{\pi D \bar{x}}{2}$$

Finalmente, utilizando un conjunto de nodos cada vez más numerosos sobre el curso del río, la longitud de la poligonal inscrita será cada vez mas parecida a la longitud buscada del Río Loco entre los puntos A y B.

Referencias.

1. *American Heritage Dictionary*, (Third Edition), Boston, Houghton Mifflin Co., 1992, artículo *Buffon*.
2. Ríos, S. *Métodos Estadísticos*, (Quinta Edición), México, Libros Mc Graw-Hill, 1967, pgs. 155 -156.
3. Rohatgi, V.: *Statistical Inference*, New York, John Wiley & Sons, 1984, pgs. 391-393, donde se analiza cuidadosamente la distribución uniforme.

4. Santaló, L. *La Probabilidad y sus Aplicaciones*, Buenos Aires, Ibero-Americana, 1955, pgs. 101-107.
5. www: En la red, mediante el ingreso de la expresión “*Buffon’s needle problem*” sobre alguno de los buscadores usuales, se encontrará sin dificultad varios lugares con un tratamiento de los temas expuestos aquí, de muy diferente nivel de profundidad. La lista es demasiado extensa para explicitarla de manera completa.

<http://www.rinconmatematico.com>

<http://www.rinconmatematico.com/foros>