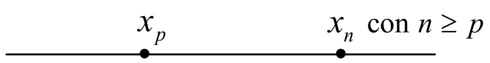
Toda sucesión real lleva dentro suyo una subsucesión monótona

El siguiente teorema, de apariencia inofensiva, tiene un significado profundo, y una de sus consecuencias es que, dicho brevemente, *toda sucesión real acotada tiene una subsucesión convergente*.

Teorema. *Toda sucesión de números reales tiene una subsucesión monótona*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión real. Diremos que un índice p es de contención de la sucesión, si $x_p \leq x_m$ para todo entero $m \geq p$.
Observar que vez fijado p, si éste es de contención, ello significa que el número x_p es una cota inferior para todos los elementos de la sucesión cuyos índices son superiores a p. Esto se visualiza notando que x_p se encuentra a la izquierda de todos aquellos



elementos de la sucesión cuyos índices son mayores que p.
Así, por ejemplo, si 7 fuese de contención para la sucesión, podemos asegurar que $x_8,\ x_9, \ldots$ están a la derecha de x_7. Por otra parte, nada podemos asegurar sobre la ubicación relativa de los primeros 6 términos de la sucesión.
Observar que un índice q fracasa en ser índice de contención, cuando para algún índice $k > q$, es $x_k < x_q$.

Ahora bien, en cuanto a la cantidad de índices de contención, puede ocurrir dos cosas: O bien hay infinitos índices de contención, o bien solamente hay un número finito de tales índices.

Supongamos que hay infinitos números de contención. En este caso podemos encontrar unos índices de contención

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

Como n_1 es de contención, siendo $n_2 > n_1$, la definición nos asegura que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$
Análogamente, puesto que n_2 es de contención, y que n_3 es un índice mayor que n_2, la misma definición de contención nos asegura que x_{n_3} está a la derecha de (o coincide con) x_{n_2}.
Esto podemos continuar haciéndolo con cada índice, y de este modo hemos conseguido la subsucesión creciente

$$x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \ldots \leq x_{n_k} \leq \ldots$$

Hemos probado la afirmación para el caso de infinitos índices de contención.

Ahora examinamos el caso en que solamente hay una cantidad finita de índices de contención. Ya que hay finitos, si avanzamos lo suficiente, habremos abandonado estos índices de contención, con la seguridad de que a la derecha ya no hay más de tales índices (¿está dibujando?). Para precisar, supongamos que hay un índice N tal que si $n \geq N$, entonces n no es de contención. Tomemos cualquier índice $n_1 \geq N$. Como n_1 no es de contención, ello significa que hay algún índice n_2, con $n_2 > n_1$, tal que

$$x_{n_1} > x_{n_2}.$$

Pero análogamente, como n_2 no es de contención, esto nos indica que tiene que existir un índice mayor, digamos $n_3 > n_2$, tal que

$$x_{n_2} > x_{n_3}.$$

Y así sucesivamente (¿yyy? ¿sigue dibujando?). Hemos obtenido una sucesión estrictamente creciente de índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...,$$

de modo tal que

$$x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > ... > x_{n_k} > ....$$

Con esto hemos probado que la afirmación también vale para el caso en que solamente hubiese un número finito de índices de contención.
Hemos probado el teorema.

Ejercicio. Definir índice de contención a derecha (dual del que hemos dado) y reproducir la discusión para asegurarse que ha comprendido la idea.

Corolario. *Toda sucesión real tiene una subsucesión con límite*

Demostración. Como acabamos de ver, la sucesión tiene una subsucesión monótona y, como sabemos, toda sucesión monótona tiene límite.
Notar que este límite es *finito* si la sucesión es acotada, es *más infinito* si es creciente y no acotada superiormente, o por último será *menos infinito* si se trata de una sucesión decreciente y no acotada inferiormente.

Teorema. *Toda sucesión real acotada tiene una subsucesión convergente. Más aún: dada una sucesión real $(x_n)_{n\geq 1}$ con $\alpha \leq x_n \leq \beta$, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ y un $x \in [\alpha, \beta]$ tal que $x_{n_k} \to x$.*

Demostración. Por el teorema, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión monótona, digamos $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Siendo ésta monótona, tiene un límite, el que tiene que ser finito porque estando acotada la sucesión original, lo mismo tiene que ocurrir con la subsucesión, y así se tiene un x tal que $x_{n_k} \to x$. Pero siendo $\alpha \le x_n \le \beta$, por la misma razón será

$$\alpha \le x_{n_k} \le \beta .$$

un conocido teorema de conservación de las desigualdades por paso al límite [1] nos permite asegurar que

$$\alpha \le x \le \beta ,$$

con lo que se termina la prueba.

Advertencia. No debiera el lector contentarse con *recordar* los enunciados de teoremas y corolarios. Con frecuencia estrategias presentes en una demostración resultan ser de utilidad en otras circunstancias. También son importantes los esfuerzos dirigidos a obtener representaciones visuales de una situación.

Nota: esta demostración es básicamente la misma que ofrece Michael Spivak en su Calculus (cfr op. cit. "puntos cumbre")
Obsérvese que el núcleo de la demostración es pequeño, y la abundancia de palabras se debe solamente a que esto está dirigido a un publico amplio. Una vez entendida, la estrategia es simple y difícil de olvidar.

[1] Supuesto que los límites existan, $a_n \le b_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n \le \lim_{n \to \infty} b_n$