Sumas telescópicas

Se estudian sumas que forman parte del folklore matemático. La meta es obtener fórmulas de condensación para ciertas sumas, que permiten conocer la suma sin sumar uno por uno. Este archivo fue extraído del archivo "Series".

Una suma se llama telescópica cuando es de alguna de las siguientes formas

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1} - b_k\right)$$

Examinaremos la primera, siendo la segunda enteramente análoga.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) =$$
$$=\left(b_1 - b_2\right)+\left(b_2 - b_3\right)+\left(b_3 - b_4\right)+\cdots+\left(b_{n-1} - b_n\right)+\left(b_n - b_{n+1}\right)$$

Los paréntesis se han colocado solamente para mostrar cómo aparece cada sumando, y quitándolos se hace más evidente que entre primer y segundo grupo mueren juntos $-b_2$ con su opuesto b_2; también se van juntos b_3 con $-b_3$. Aunque no se muestra todo, el $-b_4$ del tercer grupo se cancela con el b_4 del grupo inmediato. Tampoco se "ve", pero se siente, que el b_{n-1} del penúltimo grupo se cancela con su inmediato izquierdo (escondido entre los matorrales de los puntos suspensivos). Por fin, el b_n se cancela con su vecino $-b_n$. Luego de tanta cancelación, solamente quedan dos sobrevivientes: los extremos b_1 y b_{n+1}, que no tienen con quién cancelarse. En definitiva, nos queda

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) = b_1 - b_{n+1}$$

Si tenemos presente cómo queda un telescopio al plegarlo o desplegarlo, se entiende la razón por las que estas sumas se llaman telescópicas.
Para "sentir" esta última forma, más que recurrir a la memoria (que puede traicionarnos), resulta quizá más sencillo imaginar las sumas y luego sus cancelaciones.

Ejemplo 1.

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right)$$

es una suma telescópica, y mirándola en detalle podremos luego cancelar, comprobando que

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \cdots + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3 =$$
$$= (n+1)^3 - 1$$

O sea:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1$$

Ejemplo 2. Probemos que es telescópica (aunque de entrada no se note) , la siguiente suma.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Con una sencilla cuenta comprobamos que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, con lo cual

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así hemos obtenido prácticamente gratis la fórmula de condensación

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

Observación. Esta triquiñuela consistente en escribir $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, para de esta manera escribir la suma propuesta de manera telescópica, nos produce asombro en un primer contacto; busque el lector bibliografía e intente resolver algunos problemas.

Ejemplo 3. Dado que para todo par de reales $x, y > 0$ vale $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$, se podrá ver sin esfuerzo otra telescópica; observemos antes que en virtud de esta propiedad del logaritmo, se tiene

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Analizamos ahora $\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{k}}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1) - \ln(k)]$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1)$$

En fin:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{k}}\right) = \ln(n+1).$$

Ejemplo 4. (Este ejemplo puede omitirse en una primera lectura)

Estudiaremos la suma $\sum_{k=0}^{n} \left(r^k - r^{k+1}\right)$

Escribiremos esta suma de dos maneras distintas:
Por un lado, la telescopía nos suministra la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n} \left(r^k - r^{k+1}\right) = r^0 - r + r - r^2 + r^2 - r^3 + \cdots + r^n - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$$

Por otro lado, teniendo presente que $r^k - r^{k+1} = r^k(1-r)$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} \left(r^k - r^{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} r^k(1-r) = \left(1-r\right)\sum_{k=0}^{n} r^k$$

Hechas estas dos escrituras de la misma suma, los lados derechos tiene que resultar iguales:

$$\left(1-r\right)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$$

Si además es $r \neq 1$, obtenemos nuevamente la formula de condensación

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (r \neq 1).$$

Ejemplo 5. (Puede omitirse en una primera lectura)

Encontraremos la igualdad $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ mediante un artificio que nos permitirá luego calcular fórmulas para las sumas $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, etc.

Estudiamos la suma $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right]$, bien telescópica ella:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right] =$$

$$= 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + \cdots + (n+1)^2 - n^2 = (n+1)^2 - 1 \quad \text{(A)}$$

Por otro lado, la misma suma, aprovechando el hecho de que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, toma el siguiente aspecto:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = 2S_n + n \qquad \text{(B)}$$

donde hemos puesto $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$

Igualando ahora los lados derechos de (A) y (B) se tiene

$$2S_n + n = (n+1)^2 - 1$$

de donde

$$S_n = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$2S_n = (n+1)[n+1-1]$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

La siguiente suma es conocida desde antaño, y fue utilizada por Eudoxo para calcular el volumen de un cono de base circular, y por Arquímedes para calcular lo que modernamente diríamos el área de la región comprendida entre el gráfico de x^2 y el eje de las abscisas, para $x \in [0,1]$.

Ejemplo 6. (Puede omitirse en una primera lectura)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Llamemos $T_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ y consideremos la suma $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right]$

Como antes lo hiciéramos con $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right]$, ahora calcularemos $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right]$ de dos maneras distintas.

Por un lado, la suma es telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = 2^2 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \cdots + (n+1)^3 - n^3 = (n+1)^3 - 1 \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado, y conociendo el desarrollo del cubo de una suma, en el paso k se obtiene

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2.1 + 3k.1^2 + 1^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Esto lo aplicamos sobre cada sumando de $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right]$, obteniendo

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 3k + 1\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k \;+\; n \quad \text{(II)}^{(*)}$$

Ahora bien, (I) y (II) tienen en común el lado izquierdo, de manera tal que son iguales sus lados derechos:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n = (n+1)^3 - 1$$

Recordando que T_n es lo que queremos calcular, y que, como ya hemos probado, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, se tiene

$$3T_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n = (n+1)^3 - 1$$

y, luego de despejar un poco:

$$3T_n = (n+1)^3 - 1 - n - 3\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$(n+1)^3 - (n+1) - (n+1).\frac{3n}{2} =$$

$$(n+1)[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}] =$$

$$(n+1)[n^2 + 2n - \frac{3}{2}n] =$$

$$(n+1)[n^2 + \frac{n}{2}] =$$

(*)Recuerde que $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$$(n+1)n(n+\frac{1}{2}) =$$

$$= \frac{(n+1)n(2n+1)}{2}$$

En fin:

$$3T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

O sea

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Obtuvimos así la fórmula

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Por ejemplo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \frac{100.101.201}{6}$$

resultado al cual hubiésemos llegado solamente luego de largos padecimientos en caso de sumar los cuadrados de los primeros cien números naturales.

Podemos resumir algunas sumas importantes:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$

c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$