Reordenado una serie condicionalmente convergente, en forma que la nueva ordenación tenga otra suma.

Cuando reordenamos los términos de una serie *absolutamente convergente*, esto no solamente no altera la convergencia, sino que la serie reordenada tiene el mismo límite que la original.
No ocurre lo mismo con las series que convergen condicionalmente. Riemann probó que dada cualquier serie convergente condicionalmente, y dado cualquier L con $-\infty \leq L \leq +\infty$, siempre es posible encontrar una reordenación de sus términos de modo tal que la nueva serie tenga por límite a L .
Una demostración de esto se puede encontrar en cualquier texto de análisis matemático. Acá se ofrece un pequeño ejemplo, tomado de Piskunov.

Como sabemos, la serie alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \qquad (*)$$

converge , pero no lo hace así la serie de sus valores absolutos.

Poniendo

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n},$$

sabemos que existe un real tal que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad [1]$$

Hagamos ahora un reordenamiento de los términos de (*) , haciendo que luego de un término positivo vengan dos negativos, de la siguiente forma:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots$$

Veremos que esta serie tiene un límite finito, pero distinto del de la serie original.

Llamando T_n a las sumas parciales así construidas, estudiaremos primeramente T_{3k} :

[1] De hecho, esta sucesión tiende a $\ln 2$

$$T_{3k} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2k}$$

En fin,

$$T_{3k} = \frac{1}{2} S_{2k}$$

Tenemos entonces

$$\lim_{k \to \infty} T_{3k} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} S_{2k} = \frac{1}{2} S$$

Además

$$\lim_{k \to \infty} T_{3k+1} = \lim_{k \to \infty} \left(T_{3k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \lim_{k \to \infty} T_{3k} = \frac{1}{2} S$$

y también

$$\lim_{k \to \infty} T_{3k+2} = \lim_{k \to \infty} \left(T_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) = \lim_{k \to \infty} T_{3k} = \frac{1}{2} S$$

En fin, las tres subsucesiones tienen todas el mismo límite. Observando que estas tres subsucesiones completan toda la sucesión T_k, deducimos que la sucesión entera tiene también el mismo límite.

$$\lim_{k \to \infty} T_k = \frac{1}{2} S$$