Una conocida fórmula para el área de un triángulo

En Fig. 1, es claro que $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{h}{a}$, de donde $h = a\operatorname{sen}\gamma$. También en Fig.2, reflexionando sobre la definición del seno cuando el ángulo está comprendido entre 90° y 180°, se tiene $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{h}{a}$.

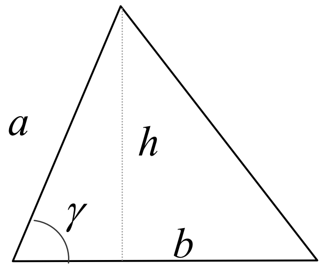


Fig. 1

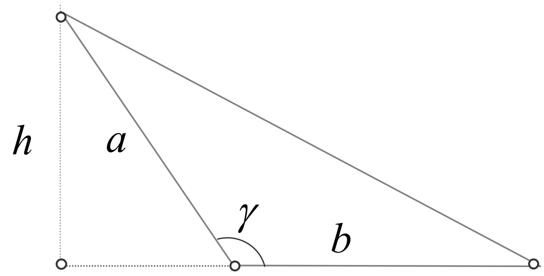


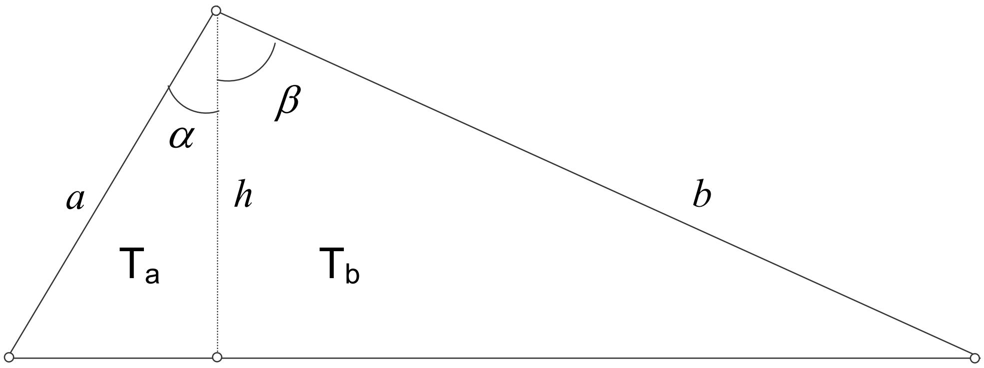
Fig. 2

En ambos casos su área es igual a $\dfrac{1}{2}bh$, y habida cuenta que $h = a\operatorname{sen}\gamma$, en ambos casos se tiene

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}\, b\, a\ \operatorname{sen}\gamma}$$

- *El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.*

Deducción sencilla de una fórmula de adición para el seno



Con T_a denotamos el triángulo izquierdo, con T_b el derecho y con T el triángulo entero.
Es claro que

$$Area\ T = Area\ T_a + Area\ T_b$$

Pero según se vio anteriormente, el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados, multiplicada por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

$$\begin{aligned} Area\ T &= \frac{1}{2} a.b.\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ Area\ T_a &= \frac{1}{2} a.h.\operatorname{sen}\alpha \\ Area\ T_b &= \frac{1}{2} b.h.\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2} a.b.\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} a.h.\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} b.h.\operatorname{sen}\beta$$

Multiplicando por 2 y dividiendo por ab se tiene

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{h}{b}\operatorname{sen}\alpha + \frac{h}{a}\operatorname{sen}\beta$$

Pero como es sencillo ver:

$$\frac{h}{b} = \cos\beta \quad ; \quad \frac{h}{a} = \cos\alpha$$

de donde surge la conocida fórmula de adición

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}\,.$$