¿Estuvo Maradona en Suiza durante el siglo XVIII?

Aquí te envío una joya de Euler. Es una de esas maravillas que encuentro a cada rato leyendo sus libros. Nunca entenderé por qué razón los textos de matemática no dicen una palabra de estas cosas. Es posible que yo, sin formación matemática, sea muy impresionable, pero para mí este tipo era un Maradona.

Comenzamos con una fórmula famosa obtenida por Francois Viete, en 1593.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \cdots$$

Viete usó un razonamiento geométrico para establecer esta fórmula (usó la razón de áreas de polígonos regulares de *n* y *2n* lados, inscriptos en la misma circunferencia.)
La fórmula de Viete tiene importancia histórica ya que por primera vez un proceso infinito fue explícitamente escrito como una sucesión de operaciones algebraicas.
Euler – a quien no le gustaban mucho los dibujitos – decide entonces arribar a la misma fórmula analíticamente.

Arranca como Maradona de la mitad de la cancha: ¡del seno del ángulo doble!

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\\ &= 4\operatorname{sen}\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\\ &= 8\operatorname{sen}\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}\\ &= \ldots.\end{aligned}$$

Luego de repetir este proceso n veces, tiene

$$\operatorname{sen} x = 2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2}$$

Luego multiplica y divide el primer término de este producto por $x \neq 0$, y lo vuelve a escribir de este modo:

$$\operatorname{sen} x = x \cdot \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \right] \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cdots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

Si ahora dejamos que n tienda a infinito, mientras x permanece constante, entonces $\frac{x}{2^n} \to 0$, y la expresión entre corchetes tenderá a 1.

Así tenemos,

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \cdots \qquad (1)$$

Esta ecuación descubierta por Euler es uno de los raros ejemplos –dice Eli Maor [1] en Trigonometric Delights–, de un producto infinito que se pueda obtener mediante álgebra elemental.

Teniendo presente que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, extendemos (1) haciéndola valer 1 en $x = 0$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$, tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cdots$$

Maradona ya ha entrado en el área grande. Se ve claramente dibujado el pánico en el rostro del portero inglés.

Nuestro héroe observa que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, y que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Y ahora en una finta magistral utiliza el coseno del medio ángulo, que dice

[1] Trigonometric Delights, por Eli Maor. Priceton University Press, 1998, Chapter 11, “A remarkable Formula”, págs. 140 -141. Se puede bajar versión pdf en http://pup.princeton.edu/books/maor/

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,,$$ [2]

lo que usa para cada uno de los términos subsiguientes obteniendo por ejemplo,

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

y así para cada uno de los otros términos. Obtiene así la fórmula de Viete:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

¿No era un Maradona el suizo?

[2] Válida cuando el lado izquierdo no es negativo.