JUGANDO CON LA TEORÍA DE JUEGOS (ll)

Ricardo Miró
Consejo de la Magistratura de la Nación
Área de procesamiento de Datos
rmiro@sion.com

Juegos con información imperfecta: suma cero y 2-uplas de equilibrio.

El análisis de un árbol de juego es útil siempre que su orden sea pequeño, tal como sucede en el caso anteriormente estudiado de los seis fósforos. Al respecto, recuérdese que las estrategias se definen sobre los árboles y son por su propia naturaleza *finitos conjuntos de finitas flechas*. Así, en un juego dado, cada jugador i tiene a su disposición, un conjunto finito de estrategias, que por lo tanto se pueden numerar e individualizar sin ambigüedad. Por ejemplo, el conjunto

$$\left\{ s_i / s_i \in \mathbf{N} \;\; y \;\; 1 \leq i \leq k(i) \right\}$$

designa a una estrategia determinada en donde con la variable entera natural s_i, sin ambigüedad, se distinguen las $k(i)$ flechas que constituyen una estrategia elegida., entre todas las estrategias diferentes a disposición del jugador i. Obsérvese, de paso, que la expresión $k(i)$ señala que la cantidad de estrategias disponibles en el juego para cada jugador es una cantidad variable, que depende precisamente de cada jugador. Con respecto a los árboles correspondientes al ajedrez, bridge o póquer, debe reiterarse que su estructura es abrumadoramente compleja, de tal manera que el estudio exhaustivo de los mismos es prácticamente imposible. Se dice que el enunciado explícito de las reglas J1 a J5 , más el árbol correspondiente, define un juego de acuerdo con la *forma extensiva.*

La teoría existente tiene otra manera de definir juegos, que es analíticamente más útil que la forma extensiva, y consiste en la siguiente idealización, denominada *forma normal:*

El conjunto de partidas posibles para cualquier juego como los estudiados por la teoría es finito, y queda numerado por la variable natural p. Cada jugador i, $(1 \leq i \leq n)$, define de antemano todas las la opciones posibles s_i elegidas frente a cada una de las opciones correspondientes al alcance de sus rivales. Cuanto esta tarea está concluida, un árbitro oficial asigna a cada jugador i la utilidad obtenida $U_i(p)$, gestada por la partida número p.

Obsérvese que mediante la definición normal *desaparece* la exigencia de información perfecta y aparece la idea de *incertidumbre* e *información imperfecta* en cada jugada., una por vez para cada jugador. Se introduce explícitamente la función de utilidad $U_i(p)$, que fija los premios y castigos del juego para el jugador i. Este enfoque permite acercarse de manera más fidedigna a las situaciones de conflicto observadas en la vida real, y permite obtener resultados útiles para los llamados *juegos de dos personas de suma cero*

Dicho con precisión, un juego entre dos personas o entidades cualesquiera es de suma cero cuando *los logros o ganancias de un jugador se originan exactamente en las pérdidas o cesiones que debe afrontar el otro jugador*. Por ejemplo, la cobranza negociada de una deuda, o una acción bélica limitada entre dos entidades armadas, se describen de manera muy aceptable como juegos de suma cero, tal como se verá a continuación.

***Cobro negociado de un anticipo**:* El jugador llamado A acuerda la venta de un determinado bien con el jugador B por una cierta suma de dinero, (cuyo valor total no interesa especificar), y negocia con él el monto del anticipo. El deudor B analiza sus posibilidades financieras y determina con todo cuidado 4 estrategias diferentes de formalizar el pago del anticipo acordado. A, el acreedor, estudia también sus propios intereses financieros, y determina a su vez 5 estrategias de efectuar el cobro. La situación se puede explicitar utilizando una tabla o matriz de 5 x 4 (5 filas por cuatro columnas). Las filas corresponden a las estrategias de cobro y las columnas a las estrategias de pago. La situación que será analizada esta definida así
:

	b_1	**b_2**	**b_3**	**b_4**	
a_1	**18**	**3**	**0**	**2**	
a_2	**0**	**3**	**8**	**20**	
a_3	**5**	**4**	**5**	**5**	
a_4	**16**	**4**	**2**	**25**	
a_5	**9**	**3**	**0**	**20**	

Fig.5 : matriz del juego del anticipo

La tabla anterior se interpreta de manera obvia. Cada columna vertical constituye una de las 4 estrategias de pago elaboradas por B para el anticipo en cuestión. Como ejemplo, la columna **b_3** está constituida por los siguientes valores de la función de utilidad asociada: 0, 8, 5, 2, 0. Similarmente, cada fila horizontal detalla alguna de las 5 estrategias de cobro preparada por A. Por ejemplo, los valores de la función de utilidad para la fila **a_4** son: 16, 4. 2, 25. Se analizará a continuación el efecto del juego desde el punto de vista de cada uno de los jugadores.

Si el vendedor A es el que comienza a estudiar sus estrategias de cobro, ¿Cuál será la más conveniente para sus intereses? Ante las diversas estrategias imaginadas por A, será natural que B elija aquella que implique la menor erogación por su parte, tal como lo indica la tabla siguiente, construida a partir de la matriz de juego de la figura 1:

	Estrategias propuestas por A					
	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**a_5**	
Elección de B	**0**	**0**	**4**	**2**	**0**	**Niveles de seguridad para A**

Cada uno de los valores que B elegiría naturalmente sobre las estrategias de cobro disponible, constituye *los niveles de seguridad de las estrategias de A*, señalados en la tabla anterior. Queda entonces definida la *función nivel de seguridad* para A, que indica los valores posibles de cobro *C(k)* para todas estrategias de pago *k* a disposición de B, $(1 \leq k \leq 4)$. La citada función nivel de seguridad es de tipo discreto y se puede graficar de manera discreta según lo expresa el gráfico siguiente:

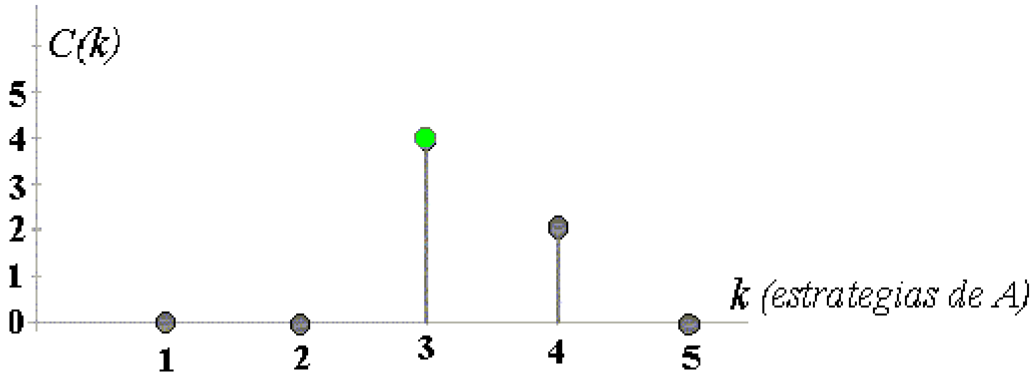

Fig. 6: función de niveles de seguridad para A

Se observa que la estrategia $\mathbf{a_3}$ proporciona el máximo nivel de seguridad para A, es decir: maximiza dicho nivel. Este es el criterio básico que ofrece la teoría para sugerir al vendedor A su mejor elección para una estrategia de cobro, que será la estrategia $\mathbf{a_3}$..

En definitiva lo que realiza A, teniendo a la vista los valores a_{ij} de la matriz del juego de la figura 5, es proponer el siguiente valor de cobro C :

$$C = \max_{1 \leq i \leq 5} \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = 4 \text{ (estrategia maximin)}$$

Si ahora es B el que estudia las consecuencias asociadas con sus estrategias de pago, será natural aceptar en este caso que el vendedor A elegirá los máximos valores de cada una de las mismas, tal como lo indica la tabla siguiente, seguida por la función discreta de cobro C(k)

	Estrategias propuestas por B				
	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	
Elección de A	**18**	**4**	**8**	**25**	**Niveles de seguridad para B**

Cada una de las elecciones de A define los niveles de seguridad para B asociados con la estrategia respectiva.
Aquí también se observa que B posee una estrategia, $\mathbf{b_2}$, que le permite pagar lo menos posible. Se entiende que esta conducta es la primariamente natural en B, para la cual el juego está diseñado La tabla anterior define entonces una función discreta de pago, notada ahora consecuentemente como *P(k)*, definida sobre las estrategias de B, y cuyas imágenes son ahora los niveles de seguridad de B.

El gráfico siguiente señala la función *P(k):*

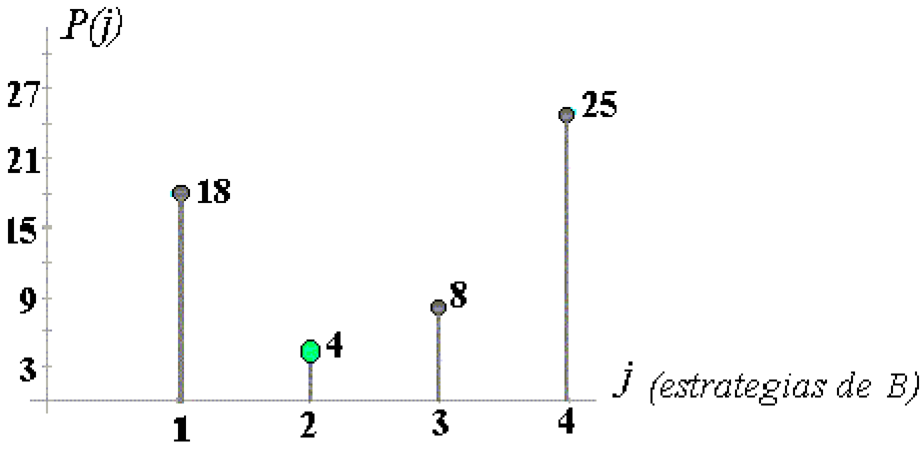

Fig. 7: función de niveles de seguridad para B

Luego, al tener también a la vista la función discreta *P(j),* el comprador B propondrá naturalmente el siguiente valor de pago P:

$$P = \min_j \max_i a_{ij} = \quad 4 \quad \text{(estrategia minimax)}$$

Se observa, finalmente que los valores C y P calculados sobre la matriz de juego coinciden. En estas condiciones, es decir cuando

$$P = Q,$$

se dice que *el par ordenado de estrategias* ($\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_2$) *forman una 2-upla de equilibrio.*

ii) Análisis de un juego de guerra previo a un combate real. El concepto de 2-upla de equilibrio surge naturalmente en la descripción de algunos enfrentamientos armados de carácter restringido [8], [9].

Un trabajo realizado por O. G. Haywood[1] analiza los dos criterios de decisión válidos mediante las cuales un jefe militar puede encarar las consideraciones previas a las acciones de un combate inminente.

En la primera de ellas, el jefe selecciona el curso de las acciones estimando lo que el enemigo *es capaz de realizar.* En la segunda, la selección se realiza sobre la estimación de lo que el enemigo *intentará realizar*. Como ejemplo de estas opciones, las fuerzas armadas de los Estados Unidos propician primariamente la toma de decisiones basadas en la *capacidad* de las fuerzas enemigas y no en las *posibles intenciones* de éstas. Al respecto, se analizará aquí un episodio de la Segunda Guerra Mundial, conocido en la literatura como Batalla del Mar de Bismarck. Un mapa donde transcurrieron las acciones que se analizarán a continuación se ofrece en la figura 8.

A fines de 1942, cuando el clima bélico en el Pacífico Oriental estaban ingresando en uno de sus picos más altos, los informes de inteligencia aliados señalaron que las fuerzas japonesas embarcarían un grueso contingente de infantería, zarpando en conjunto con varias naves de transporte de combustible en el puerto de Rabaul. Esta plaza está ubicada al norte de la isla de Nueva Bretaña, y el destino detectado por los informes daba por seguro al puerto de Lae, localizado en una pequeña península de la

[1] Haywood, O.G.:"*Military Decision and Game Theory*", Journal of Operations Research Society of America, 1954.

isla de Nueva Guinea, que separa el Mar de Bismarck del Mar de Salomón, tal como se observa en la figura 8.

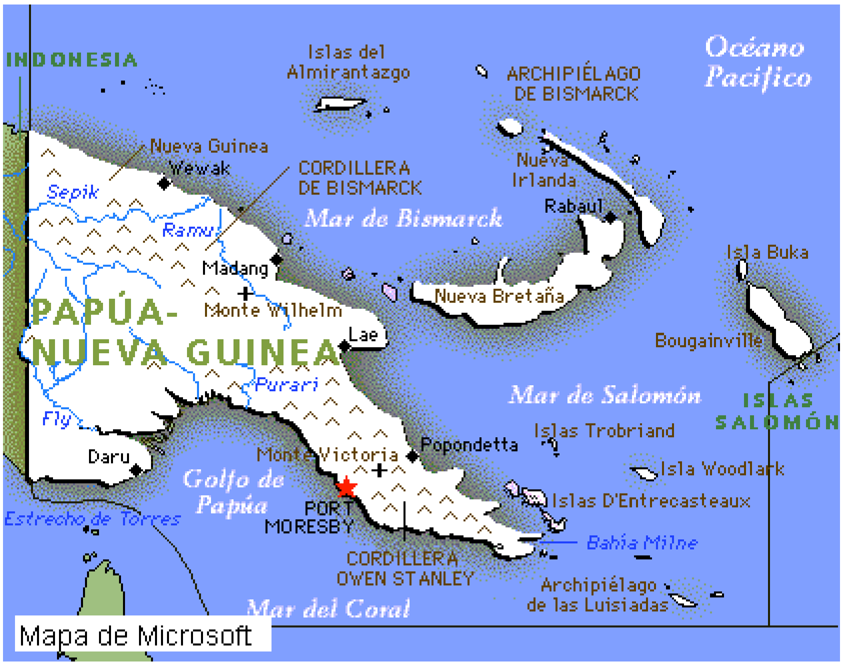

Fig.8. Ámbito geográfico de la Batalla del Mar de Bismarck

El estado mayor de las fuerzas imperiales, al mando del veterano contralmirante Kimura Masatomi [9], analizó las dos rutas disponibles para llegar a destino, tal como se puede observar en la figura 8 Una de ellas, caracterizada por su clima lluvioso, atraviesa el mar de Bismarck bordeando el litoral marítimo norte de Nueva Bretaña. La otra ruta atraviesa el mar de Salomón, y posee en general buenas condiciones meteorológicas. En cualquiera de los dos casos la travesía duraría alrededor de tres días.

El general norteamericano George Kenney, al estudiar el escenario descrito, reparó en las dos elecciones que ofrecía la situación. Ambas implicaban concentrar sus aviones de reconocimiento sobre una ruta o la otra. Una vez avistado, el convoy podría ser bombardeado antes de su llegada a Lae. En unidades dadas por días de bombardeo, el estado mayor del general norteamericano elaboró la siguiente matriz para el inminente enfrentamiento:

		Estrategias de Masatomi	
		ruta norte	**ruta sur**
Estrategias de Kenney	**ruta norte**	**2**	**2**
	ruta sur	**1**	**3**

Aplicando los criterios minimax y maximin, se puede ver fácilmente que existe un par de estrategias que conforman una 2-upla de equilibrio: (ruta norte; ruta norte), con un costo medio estimado de 2 (dos) días de bombardeo. Los aviones de reconocimiento norteamericanos y australianos participantes en el evento, avistaron el convoy en la madrugada del 1 de marzo de 1943, unas horas después de que hubiera abandonado el puerto de Rabaul.

La batalla desatada en consecuencia sentó doctrina para luchas de este tipo, desaconsejando totalmente periplos marítimos como el comentado, al alcance cercano de la aviación hostil. En efecto, el resultado fue completamente adverso para las fuerzas japonesas. A pesar de esto - observa Haywood en su artículo-, *no puede afirmarse que la elección del contralmirante Masatomi haya sido errónea*. La elección de la ruta norte fue correcta, en el sentido teórico proporcionado por la teoría de juegos. Es decir, como mínimo, fue tan buena como la estrategia provista por la ruta sur, al enfrentarla contra cualquiera de las elecciones a disposición del general Kenney.

Estrategias mixtas y el teorema minimax.

Se desea recalcar que un juego de suma cero no tiene por qué tener necesariamente una 2-upla de equilibrio, tal como queda ilustrado por el juego que posee la siguiente matriz de utilidades:

	b1	**b2**
A1	**3**	**1**
A2	**2**	**4**

En efecto, como se puede observar fácilmente, el juego anterior no tiene una 2-úpla de equilibrio. En realidad, tal circunstancia se cumple estrictamente si se consideran solo las estrategias dadas de manera explícita. Como en la elección de cada una de ellas no interviene el azar, se las llama *estrategias puras*.

Para facilitar el análisis de este apartado, se sugiere seguir utilizando la interpretación del *juego del anticipo* dado anteriormente. Supóngase entonces que A elige las estrategias de cobro **a1** y **a2** de manera aleatoria, de acuerdo con una determinada distribución de probabilidad sobre las elecciones. Es decir: A elige **a1** con una probabilidad x , y también elige **a2** con probabilidad complementaria $1 - x$. Recuérdese que por definición es $0 \le x \le 1$. Se verá el efecto de esta nueva estrategia, llamada ahora *mixta*, pues en ella interviene explícitamente el azar. Si en el juego anterior B decide elegir **b1**, entonces en promedio A cobrará un retorno en efectivo de $3x + 2(1 - x)$ todas las veces que B proceda de esa manera. Pero si B elige **b2**, entonces A cobrará en promedio $x + 4(1 - x)$ todas las veces que B realice esa elección. El nivel de seguridad de A, o sea la cota mínima para el cobro que pretende ejecutar A, estará dado por la menor de estas expresiones. Es decir, en este caso, la función de cobro $C(x)$ tendrá la representación siguiente:

$$C(x) = \min[3x + 2(1 - x); 1x + 4(1 - x)]$$

Se observa ahora que $C(x)$ es una función continua. Luego de algunas manipulaciones elementales, $C(x)$ se podrá escribir así:

$$C(x) = \begin{cases} -3x + 4 & \text{si} \quad x > \dfrac{1}{2} \\ x + 2 & \text{si} \quad x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esta es una función continua que posee el siguiente gráfico:

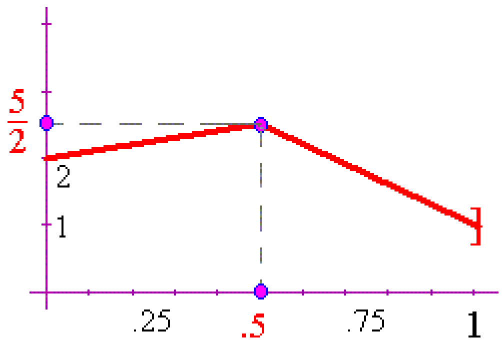

Fig. 8: función de niveles de seguridad para A

Se determina analíticamente de manera sencilla, que el máximo de $C(x)$ se verifica en: $x = \frac{1}{2} = .5$, valor para el cual el cobrador recibe un retorno óptimo de $\frac{5}{2}$, De tal modo que se verifica:

$$\frac{5}{2} = \max_x \min[x+2; -3x+4] = \max_x C(x)$$ (estrategia de cobro maximin)

Un análisis similar se realizará ahora para el jugador B.

Utilizando la misma matriz de utilidades, B elegirá ahora la estrategia **b1** con una probabilidad z y la estrategia **b2** con una probabilidad *1 – z*, donde por definición será: $0 \le z \le 1$.

Si ahora el vendedor A decide optar por **a1**, B deberá pagar en promedio $3z + 1(1-z)$, todas las veces que A realice esa elección. Pero si A elige **a2**, B deberá pagar en promedio $2z + 4(1-z)$ todas las veces que A proceda de esa manera. Obsérvese que ahora el nivel de seguridad de B queda definido por el máximo de estas dos expresiones, que es la naturalmente preferida por A. Es decir, queda definida la siguiente función $P(z)$ de pago:

$$P(z) = \max[3z + 2(1-z); 1z + 4(1-z)]$$

Esta expresión, se puede escribir así:

$$P(z) = \begin{cases} -2z+4 & \text{si} \quad z < \frac{3}{4} \\ 2z+1 & \text{si} \quad z \ge \frac{3}{4} \end{cases}$$

Su gráfico es como sigue:

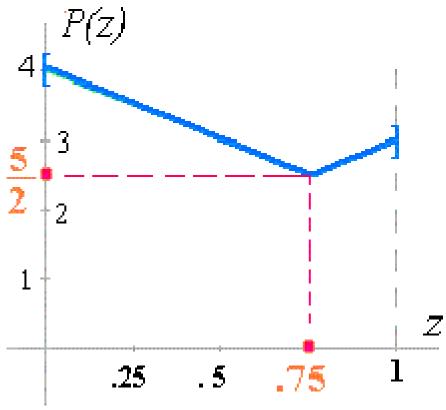

Fig.9: función de niveles de seguridad para B

Queda claro entonces que el comprador B paga un mínimo cuando $z = \frac{3}{4} = 0.75$. Para esta frecuencia de elección de estrategias, B pagará en promedio $\frac{5}{2}$. Es decir:

$$\frac{5}{2} = \min_z \max[2z+4; 2z+1] = \min_z P(z) \qquad \text{(estrategia de pago minimax)}$$

En síntesis, para cada jugador existe una estrategia mixta, ($\frac{1}{2}\mathbf{a}_1$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}_2$) para A y ($\frac{3}{4}\mathbf{b}_1$, $\frac{1}{4}\mathbf{b}_2$) para B, respecto de las cuales el número $\frac{5}{2}$ es el mayor nivel de seguridad para A y para B, no existiendo ningún par de estrategias mixtas que mejoren simultáneamente los niveles de seguridad para ambos. Se dice en este caso que ambas estrategias mixtas formas una *2-upla de equilibrio*.

El ejemplo que se acaba de desarrollar para un juego sin un par de estrategias puras en equilibrio sugiere preguntarse si el método es general para cualquier juego de suma cero. Este es precisamente el contenido del teorema minimax. El resultado fue conjeturado al principio falso por Borel, pero von Neumann logró demostrarlo exitosamente en 1929. Por ser demasiado específico y técnico para un artículo como el presente, se remite al lector interesado a la obra de Luce y Raiffa [8], donde se brindan los detalles pertinentes. Aquí solamente citaremos su enunciado básico, que generaliza el resultado obtenido en el ejemplo del juego del anticipo:

Teorema Minimax: ***Dado cualquier juego de suma cero, existe un número v (retorno para A y egreso para B), tal que tiene asociadas dos estrategias, a saber: una estrategia mixta (estrategia maximin) para A que le garantiza recibir como mínimo v, y una estrategia mixta para B que le garantiza ceder a lo sumo v (estrategia minimax).***

Comentarios Afines y Aportes Teóricos Específicos Realizados por John Forbes Nash y Otros Autores.

Se espera que mediante los ejemplos expuestos, el presente trabajo haya permitido presentar de manera inteligible los elementos básicos de la teoría, Esto incluye su parte más elaborada, constituida por el capítulo de los juegos de suma cero. Tal como se dijera al principio, la disciplina tiene áreas muy extensas en las que han descollado diversos especialistas, además de los fundadores ya citados.

En lo que resta del artículo se mencionarán y analizarán brevemente algunos resultados y aportes teóricos primarios de la teoría analizada.

Luego de que von Neumann publicara inicialmente su demostración para el teorema minimax, mediante el empleo de elementos pertenecientes a la teoría de la convexidad[2], varios autores presentaron con diversas técnicas otro tipo de demostraciones para el mismo resultado. Nash publicó la suya en 1950, utilizando el concepto de punto fijo asociado con un determinado operador **T**, definido sobre un espacio euclídeo de dimensión n. Al respecto, recuérdese que un vector ***x*** será un *punto fijo* para el tal operador **T** cuando **T**(***x***) = ***x***. En [8, apéndice] aparecen los detalles de esta demostración - de extensión menor que la elaborada por von Neumann-, donde Nash utiliza el *teorema del punto fijo de Brower*, que según [7] es el resultado teórico (aquí auxiliar) más importante de todos los que tratan de puntos fijos en espacios euclídeos.

Dos conceptos fundamentales ligados entre sí fueron sometidos a mucha crítica, tanto por von Neumann y Morgenstern hacia 1947, como por Millnor y Hausner en 1954. Tales son los de *apuesta equitativa* y *utilidad*. El primer concepto, de muy antigua data, versa sobre la determinación del valor apropiado de una apuesta en un juego de azar. Esta determinación está asociada con la conducta global de los apostadores frente a una opción de resultado aleatorio, circunstancia muy difícil de expresar matemáticamente. De manera explícita, este aspecto está conectado con los fundamentos de la teoría de los juegos y trata de acotar axiomáticamente, mediante el desarrollo del segundo concepto, la conducta de las fuerzas participantes en una inversión de riesgo.

Supóngase un juego de azar con *n* resultados y sea el valor en pesos de éstos $a_1, a_2, ..., a_n$ respectivamente. Supóngase además que se conocen las probabilidades asociadas con estos resultados, $p_1, p_{2,...,} p_n$. La pregunta esencial es ésta: ¿Hay alguna manera racional para determinar con precisión el precio justo de este juego? Al principio de los estudios teóricos vinculados con este tema, se pensó que el valor medio de la variable aleatoria asociada, que está dado por la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k p_k$ suministraría la respuesta al interrogante planteado. Sin embargo, el suizo Daniel Bernoulli (1700-1782) introdujo críticamente su famosa *paradoja de San Petersburgo*, mediante el juego siguiente:

[2] Un conjunto de vectores con componentes reales o complejas se dice *convexo* cuando para cualquier par de puntos del conjunto, el segmento definido por ese par, pertenece también al conjunto. La teoría de la convexidad es esencial para diversas cuestiones de programación lineal y de teoría de juegos.

Se arroja una moneda equilibrada al aire hasta que aparezca cara. El apostador recibe 2^n ***pesos si la primera cara aparece en la tirada n.***

La probabilidad del suceso recuadrado equivale evidentemente a la probabilidad de obtener exactamente *n –1 secas* y 1 *cara* al final de la experiencia. Como los sucesos son independientes, es fácil advertir que dicha probabilidad vale $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Entonces el apostador recibe 2 pesos con probabilidad $\frac{1}{2}$, 4 pesos con probabilidad $\frac{1}{4}$, 8 pesos con probabilidad $\frac{1}{8}$ y así sucesivamente. Luego, el valor medio de este juego será evidentemente igual a:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+8\left(\frac{1}{8}\right)+16\left(\frac{1}{16}\right)+...+=1+1+1+1+1+....$$

que resulta ser una serie claramente divergente. Luego, el valor medio será infinito o, lo que es lo mismo, inexistente.

Los axiomas que definen la conducta de las inteligencias antagónicas frente a una opción de riesgo varían levemente según los autores [8], pero un cuadro razonable estará dado por la siguiente lista:

i) Cualesquiera de las opciones dadas serán comparables entre sí. Esto es: dadas dos opciones, el jugador elegirá una de ellas o será indiferente a las dos.
ii) Tanto la indiferencia como la preferencia de opciones son transitivas. Esto quiere decir que frente a tres opciones A, B, C, si el jugador prefiere A antes que B y B antes que C, entonces preferirá necesariamente A antes que C.
iii) En el caso de que una opción esté constituida por otras opciones, entonces esta descomposición no será arbitraria, sino que podrá analizarse a la luz del cálculo de probabilidades.
iv) Si dos opciones son indiferentes para un jugador, entonces serán también intercambiables en una opción compuesta, tal como la considerada en el punto anterior.
v) Si dos opciones involucran las mismas alternativas, entonces aquella que posee la alternativa más deseada de mayor probabilidad, será también la preferida.
vi) Si la opción A es preferida a B, y B es preferida a C, entonces existirá una opción D que involucre A y C con probabilidades apropiadas, que para el jugador dado será indiferente a B.

Si bien ya se ha observado que los juegos de suma cero constituyen los más desarrollados de la teoría, debe señalarse que Nash se ha destacado por sus aportes en donde se generalizan resultados clásicos. Los procesos en donde se excluye el intercambio monetario mediante la *negociación o trueque* ha sido estudiado por este autor (1951, [8]), aplicándolos a la descripción de las fuerzas, estrategias y opciones disponibles entre los participantes involucrados. Tal como Nash los describe, el marco típico para la aplicación de estos resultados está dado por las tensiones suscitadas entre *monopolio* (un solo vendedor) y *monopsonio* (un solo comprador)[3], entre organizaciones empresarias y sindicatos, o entre estados que pactan un determinado intercambio compensado de bienes o servicios.

Supóngase que se tenga un juego de *n* participantes y frente a su descripción normal, tal como se describió antes este concepto, se extrae en algún momento de su desarrollo una n-upla de estrategias $(s_1, s_2, .., s_n)$. Este vector indica que en el instante elegido, cada participante *k* ha elegido la estrategia s_k como consecuencia de un análisis libre y exhaustivo. Se dirá que este vector de estrategias estará en *equilibrio de Nash* si *ningún jugador participante considera que será ventajoso cambiarla por otra*. Es decir, que el retorno eventual de la función de utilidad U_k que espera el jugador k es maximal con respecto a cualquier elección posible de otra estrategia personal r_k. Técnicamente, lo resalado en bastardilla queda expresado mediante el siguiente sistema de inecuaciones:

$$U_k(s_1, s_2, .., s_k, ..., s_n) \geq U_k(\ s_1, ..., r_k, ..., s_n),\ \ 1 \leq k \leq n$$

Tal como fuera mencionado al principio, el enfoque algebraico consecuente fue aplicado por Nash a los *juegos no cooperativos*, es decir, aquellos en donde no se permite ningún tipo de alianza entre los participantes. En este tipo de confrontaciones, que tampoco son necesariamente de suma cero, se introduce como en éstas el concepto ya analizado de estrategia mixta. De tal manera, basándose en el álgebra que rige el sistema de inecuaciones anteriores, Nash introduce de modo natural su concepto de *n-úpla de equilibrio*, que puede definirse ahora para una cantidad arbitraria de *n* jugadores. Este es el germen del artículo que le permitió acceder de manera compartida al Premio Nobel de Economía, en 1994.

A título de reflexión final, se desea resaltar el estricto *sentido estadístico* que posee la teoría de los juegos en sus diversas variantes. Sus resultados ofrecen efectos que solamente se pueden comprobar a largo plazo, y son apropiados precisamente por esto para las corporaciones o entidades de gran porte que permanentemente efectúan negociaciones modelables a través de los resultados teóricos desarrollados. En un primer análisis, sin embargo, se podría observar que una estrategia pura escapa a la consideración estadística. Pero en realidad, aquella es un caso especial de estrategia mixta, en donde toda la masa de probabilidad, de valor unitario, está concentrada en una sola elección de partida.

La naturaleza estadística comentada se observa de manea especial en el juego del anticipo. Tan solo una conducta permanente que siga lo recomendado por la teoría garantizará a largo plazo los resultados previstos por la misma. Esto pone de manifiesto entonces que será muy injusto para con la teoría exigirle resultados óptimos a partir de una única realización del experimento, tal como se ha ilustrado en el caso de la batalla suscitada en el Mar de Bismarck. Tal como se ha visto, con el mismo análisis previo, las fuerzas japonesas *perdieron* y las norteamericanas *ganaron*.

Por otra parte, la existencia del promedio y de las probabilidades asociadas con la aplicación de estrategias mixtas, introduce en ambos casos la cuestión adicional de evaluar esas frecuencias sobre los datos de la historia registrada. Esa evaluación deberá considerar forzosamente los intervalos de confianza asociados con las muestras numéricas históricas, lo que plantea nuevas incertidumbres que aquí no se han nombrado, por no corresponder su estudio a la teoría de juegos. Sin embargo, su

[3] Se debe observar, de manera obvia, que las Fuerzas Armadas y de Seguridad ejercen el monopsonio de la compra en el área del armamento de guerra.

aplicación efectiva necesariamente habrá de considerar la evaluación de los citados intervalos de confianza. Estos se deberán determinar con los métodos de cálculo provistos por la estadística clásica. [11].

Como se ha visto, la teoría de juegos tiene obvias aplicaciones bélicas, que sin duda pueden estar siendo aplicadas en la actualidad con toda la crudeza de las circunstancias. El autor de este artículo desea expresar que suscribe plenamente a la postura de Rincón Matemático a favor de la paz.

Referencias.

1) Anónimo: ***Las Mil y Una Noches***, (edición comentada por Rafael Cansinos Assens), Madrid, Aguilar, 1997.
2) Anónimo: ***Mabinogion***, Madrid, 1998, Editorial Siruela.
3) Bell, E.T.: ***Historia de las Matemáticas***, México, Fondo de Cultura Económica, 1998.
4) Blackwell, D., Girsick, M. A.: ***Theory of Games and Statistical Decisions***. New York, Dover Publications Inc., 1979.
5) Bollobas, J.: ***Graph Theory***, Springer Verlag, New York, 1988.
6) Corominas, J., Pascual, J. A**.: *Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico***, Madrid, Editorial Gredos, 1991, artículo ***ajedrez***.
7) Henle, M.: ***A Combinatorial Introduction to Topology***, New York, Dover, 1979.
8) Luce, R., Raiffa, H.: ***Games and Decisions***, New York, Dover, 1989.
9) Nevitt, D.: ***The Battle of Bismarck Sea,*** página web cuya dirección es: **http://www.combinedfleet.com/bismksea.htm**
10) O'Connor, J., Robertson, E. F.: ***John Forbes Nash***, artículo de la compilación inglesa de biografías, ubicada en página web: **http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html** donde se deberá apretar con el ratón en la letra N para ingresar en la biografía deseada.
11) Rohatghi, V.: ***Statistical Inference***, John Wiley & Sons, New York, 1989.
12) Russell, B.: ***Historia de la Filosofía Occidental***, Madrid, Aguilar, 1972
13) Rey Pastor, J., Babini, J. ***Historia de las Matemáticas***, Barcelona, 1997, Editorial Gedisa (2 tomos)
14) Santaló, L.: ***La Probabilidad y sus Aplicaciones***, Buenos Aires, Ibero-Americana, 1955.
15) Santaló, L.: ***Vectores y Tensores con sus Aplicaciones***, Buenos Aires, Eudeba, 1975.
16) University of Chicago, Ill. ***Algorithms and Automatic Computing Machines***, 1980.

Buenos Aires, junio de 2002.