

JUGANDO CON LA TEORÍA DE JUEGOS I

Ricardo Miró

Consejo de la Magistratura de la Nación

Área de Procesamiento de Datos

rdmiro@fibertel.com.ar

Introducción.

La teoría de juegos, como realidad cultural, reconoce varios antecedentes enraizados de manera inicial con la literatura y las leyendas de gestas. Por ejemplo, en *Las Mil y Una Noches*, el ajedrez¹ aparece repetidamente en varios de sus relatos. Casi siempre se evoca en ellos la inteligencia o arrojo de los adversarios involucrados, y en al menos una oportunidad, inclusive queda consignada de manera elogiosa el desempeño femenino². Un registro que ha tenido menos difusión está constituido tal vez por una añeja colección de leyendas celtas insulares denominada *Mabinogion* [2]. En uno de sus capítulos - *El Sueño de Maxen* -, se describe un juego de fichas que recrea mediante una simulación la lucha entre el cazador y la presa, llamado *gwyddbwyll*. Al respecto, los traductores modernos de la edición consultada, quizás para atenuar el efecto acústico de tan inusual grafía para los lectores del mundo hispanohablante, han preferido ahorrar inconvenientes, citándolo simplemente como “ajedrez”, aunque desde luego, este no sea para nada el caso.

Resulta evidente observar que el concepto de *azar* es básico en algunos juegos de salón, e interviene de manera muy específica en la estructura de ciertos procesos caracterizados por el conflicto de intereses. En este sentido, tal como lo expresa el Dr. Santaló [14], la primera reflexión científica sobre un juego de azar, parece haber sido efectuada por Galileo (1564-1642), a raíz del llamado *pasadiez*, de moda por aquellos tiempos. Aquí, el jugador lanza tres dados simultáneamente, y gana si la suma obtenida es mayor que 10, perdiendo la apuesta en caso contrario. Galileo analizó de manera minuciosa las partidas del juego, y dejó varias acertadas observaciones acerca del mismo. Esto, aún sin contar con una definición precisa de probabilidad, enunciada por primera vez y también de manera definitiva por el francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827), más de un siglo y medio más tarde que Galileo [3], [13].

Desde el punto de vista estrictamente vinculado con el presente artículo, cabe decir que la moderna teoría de los juegos aparece claramente delineada hacia la segunda y tercera década del siglo XX, en la obra de Emile Borel y John von Neumann. Luego, como colofón y consecuencia de estos antecedentes, surgen las ideas y aportes bien definidos elaborados por John Forbes Nash.

Félix Edouard Emile Borel (1871-1956), ha sido sin duda uno de los matemáticos más destacados del siglo XX. La literatura [3], [8], [13], lo considera el fundador de la moderna teoría de la medida. Sobre este pilar, René Baire (1874-1932) y Henri Lebesgue (1875-1941) fundaron luego el análisis funcional, dentro de cuyo marco se introduce la integral que lleva el nombre de éste último. En 1921 Borel produjo una serie de trabajos primigenios sobre la teoría de juegos, donde construye sus ejemplos basándose en el póquer, y consigna los elementos que definen básicamente los juegos con información imperfecta. En

¹ Del árabe *as-ch-schitrench*, y éste término a su vez de la voz sánscrita *sitrang* [6].

² Noche 269, *Disputas entre el hombre y la mujer ilustrada* [1].

este campo, su esfuerzo teórico estuvo orientado hacia la búsqueda generalizada y constructiva de una estrategia óptima para un juego determinado. Además, desde el punto de vista ético y cívico, debe señalarse de manera especial que Borel, en tanto científico y ciudadano, fue un distinguido patriota y hombre de bien público, al servicio permanente de los intereses de su país. En 1918, como reconocimiento a sus trabajos de acústica matemática tendientes a localizar de manera remota las piezas de artillería enemiga, recibió la preciada condecoración francesa conocida como *Croix de Guerre*. Nuevamente, al culminar la Segunda Guerra Mundial, le fue otorgada en 1945 la no menos prestigiosa *Médaille de la Résistance*.

John von Neumann (1903-1957), nacido en Hungría, recibió su formación matemática inicial en la Universidad de Budapest, en la de Berlín y en el Instituto Federal Suizo de Tecnología, doctorándose en matemáticas hacia 1926. Posteriormente, en 1930, emigró y se naturalizó en los Estados Unidos. Sus contribuciones científicas denotan un amplio rango de intereses, oscilando los mismos entre el análisis funcional, la mecánica cuántica, la lógica matemática, el diseño de computadoras y reactores nucleares, y también la teoría de juegos. En este campo trabajó intensamente sobre sus fundamentos teóricos, logrando demostrar el llamado teorema minimax, que se comentará más adelante. En colaboración con el economista austríaco Oskar Morgenstern (1902-1976) produjo un estudio hoy considerado clásico, llamado "*Theory of Games and Economic Behaviour*" ("La Teoría de Juegos y el Comportamiento Económico"), concebido inicialmente para profesionales de la economía, pero con consecuencias inmediatas en el campo social, jurídico, político, económico y desde luego militar. Como miembro de la Corporación RAND³ a partir de 1948, von Neumann intervino en el desarrollo de una serie de modelos matemáticos, que se aplicaron con éxito a problemas logísticos suscitados durante el transcurrir de la guerra fría [8].

John Forbes Nash (1928-) es originario del estado norteamericano de West Virginia. Sus intereses estuvieron orientados inicialmente hacia disciplinas tecnológicas aplicadas, como la química industrial o la ingeniería electrónica, recibiendo su formación básica en la Universidad de Carnegie Mellon. Posteriormente, al tener en cuenta el asesoramiento de uno de sus profesores, el matemático irlandés John Lighton Synge (1897-1995), decidió dedicarse de manera exclusiva a las matemáticas. En esta línea, hacia 1949, mientras preparaba su tesis doctoral en Princeton - titulada brevemente *Non Cooperative Games* (Juegos No Cooperativos)-, produjo un breve trabajo complementario como parte de la misma, que le valió 45 años más tarde, en 1994, la obtención del Premio Nobel de Economía. Este galardón fue compartido con dos economistas teóricos: su compatriota John Harsanyi (1920-2000), de la Universidad de California en Los Angeles, y el alemán Reinhard Selten (1930-), de la Universidad de Bonn. Tal como se desprende del título de su tesis, Nash encara el análisis de la estructura de los juegos no cooperativos, que será reseñada más adelante, e introduce a tales efectos su concepto de *n-úplas de equilibrio*. Por otra parte, al igual que von Neumann, Nash también se desempeñó en la Corporación RAND al investigar allí varias cuestiones vinculadas con la logística militar. Aún teniendo en cuenta estos aportes iniciales que claramente se inscriben dentro de la denominada matemática aplicada, la crítica internacional [4],[8], [10] ubica a Nash como un destacado matemático puro contemporáneo, autor de varios resultados originales en geometría diferencial, en geometría algebraica, y en la teoría de los espacios de Riemann.

³ RAND, anagrama compuesto por las voces *research and developement* (investigación y desarrollo)

En su presente estado de desarrollo, la teoría de juegos ofrece mediante sus textos habituales una bibliografía sumamente extensa. Por ejemplo, en la conocida obra de Luce y Raiffa [7], se citan más de 300 referencias sobre el tema. También son abundantes las páginas *www* que le dedican atención en todos los niveles imaginables, imposibles de citar en su totalidad. Basta trabajar con cualquiera de los buscadores habituales introduciendo las voces *game theory* para acceder a una muy abundante lista de sitios y correspondencias. Éstas figuran principalmente en inglés, pero también se observan páginas en alemán, ruso y francés.

Por los motivos citados, se estima casi imposible en un artículo como éste esbozar de manera inteligible el denominado *estado del arte* asociado con la teoría de juegos, dentro de la cual figuran, sin duda, los aportes personales desarrollados por Nash y sus continuadores. No obstante, el autor cree que se pueden brindar los elementos básicos que permitan acceder de manera razonable al espíritu de la teoría, de sus resultados y de sus aplicaciones. La consulta a las referencias bibliográficas ofrecidas, permitirá al lector interesado extender y ampliar en detalle los conceptos que se tratarán a continuación.

Juegos de información perfecta y árboles asociados.

El conflicto de intereses que surge entre grupos humanos antagónicos - en especial aquel vinculado con la guerra-, tiene tantas aristas y tantas vinculaciones complejas, que a primera vista parece muy alejado de su posible descripción matemática. Sin embargo, la historia de la ciencia muestra de manera reiterada que fenómenos extremadamente complejos se han rendido a su estudio racional mediante simplificaciones convenientes, realizadas o mejoradas una y otra vez, utilizando para tales efectos el método empírico de prueba y error. Bertrand Russell (1879-1970) [12], ha observado en este campo que el conocimiento exitoso de la realidad comenzó en primer término con el estudio de las entidades más alejadas e inaccesibles para el hombre, los cuerpos celestes, pero que en la actualidad se asiste a búsqueda apasionada de iguales resultados exitosos en el terreno próximo e inmediato de los fenómenos humanos.

Al tener en cuenta lo que se acaba de expresar, una definición estrictamente formal de lo que matemáticamente se entiende como *juego*, parecería aquí muy poco útil. Sin duda, se la brindará más adelante a los efectos de completar el análisis realizado. Ahora bien, antes de encarar ese paso, convendrá analizar exhaustivamente un ejemplo concreto, lo más elemental posible, apelándose para tal fin al sentido usual del término dado anteriormente en bastardilla.

El sencillo ejemplo elegido está dado por el llamado juego de los *once fósforos* [16].

Se colocan once fósforos sobre la mesa. El primer jugador, llamado A, toma 1, 2 o 3 de los fósforos dados. A continuación, el segundo jugador, llamado B, toma también 1, 2 o 3 de los fósforos restantes. Luego, los jugadores se alternan en este procedimiento hasta que no queden más fósforos disponibles. El jugador obligado a tomar el último fósforo es el perdedor.

La pregunta siguiente, a los efectos de la teoría aquí analizada, es fundamental: ¿Existirá algún esquema de elección disponible para que el primer jugador obligue a su oponente a tomar el último fósforo?

Una reflexión atenta sobre el desarrollo del juego muestra que el primer jugador (A) puede efectivamente hacerlo, si observa la conducta siguiente:

- a) *Primera jugada*: A toma dos fósforos.
- b) *Jugadas subsiguientes*: Si B toma k fósforos ($k \leq 3$) en su última jugada, entonces A toma $4 - k$ fósforos.

Esta lista es completa, en el sentido de que independientemente de lo que haga su oponente (B), *siempre queda especificada una única manera en la que A pueda jugar*.

En la teoría de juegos una lista de instrucciones como la citada explícitamente en a) y b) se llama *estrategia*⁴. Si el jugador A gana forzosamente cada vez que sigue una determinada estrategia, se dice que la misma es una *estrategia victoriosa o ganadora* para A. Este hecho, que se puede demostrar con el rigor necesario, se ilustra con los ejemplos siguientes:

A B A B A B
2 2 2 1 3 1

A B A B A B
2 3 1 1 3 1

En este juego la estrategia victoriosa existe únicamente para el jugador que actúa en primer término, circunstancia que habitualmente se define por un mecanismo de azar, por ejemplo, mediante el artilugio de arrojar una moneda al aire. Sin embargo, se puede demostrar con facilidad, que si el jugador A *ignora la existencia de la estrategia victoriosa*, o si simplemente se equivoca en la primera jugada eligiendo 1 o 3 fósforos, entonces existe una estrategia para que B sea el ganador. Se sugiere vivamente experimentar con esta hipótesis.

Parece entonces claro que una gran cantidad de juegos de salón (aunque, por supuesto, no todos los que estudia la teoría correspondiente) queda caracterizado mediante las siguientes propiedades:

- (J1): En el juego participan dos jugadores que toman turno alternativamente para efectuar una jugada.
- (J2): El juego termina solamente con uno de los tres resultados posibles: (i) A, el jugador que realiza la primera jugada, es el ganador (circunstancia denotada con el símbolo "+") o bien (ii) gana el otro jugador, B, (circunstancia denotada con el símbolo "-"), o bien se produce un empate (notado con "e")
- (J3): Cada jugada consiste en una elección que hace el jugador de un conjunto de jugadas posibles. La elección es una decisión libre del jugador, en lugar de ser el resultado de algún evento aleatorio. Se exceptúa en esto el mecanismo de decisión inicial que determina quién es, en definitiva, el que inicia la partida.
- (J4): En cualquier punto del juego ambos jugadores tienen toda la información acerca de las jugadas que ya se han hecho y las que puedan hacerse todavía.
- (J5): Existe un límite superior para el número de jugadas en una partida.

Se comprenderá sin dificultad que ambos jugadores no pueden tener simultáneamente una estrategia ganadora. Ahora bien: es bastante menos inmediato aceptar que en todo jue-

⁴ Del griego στρατηγία, aludiendo al *estado del generalato*, o a las *aptitudes del general* [6].

go que satisface las propiedades anteriores J1 a J5 *existe una estrategia ganadora para alguno de sus jugadores*. Por considerar que esta aseveración tiene un nivel matemático de dificultad aceptable, se la demostrará completamente enseguida.

Una representación gráfica muy usada en la literatura técnica de la teoría de juegos [7], [6], es la del *árbol asociado*, que describe en el tiempo todas las partidas posibles del juego dado.

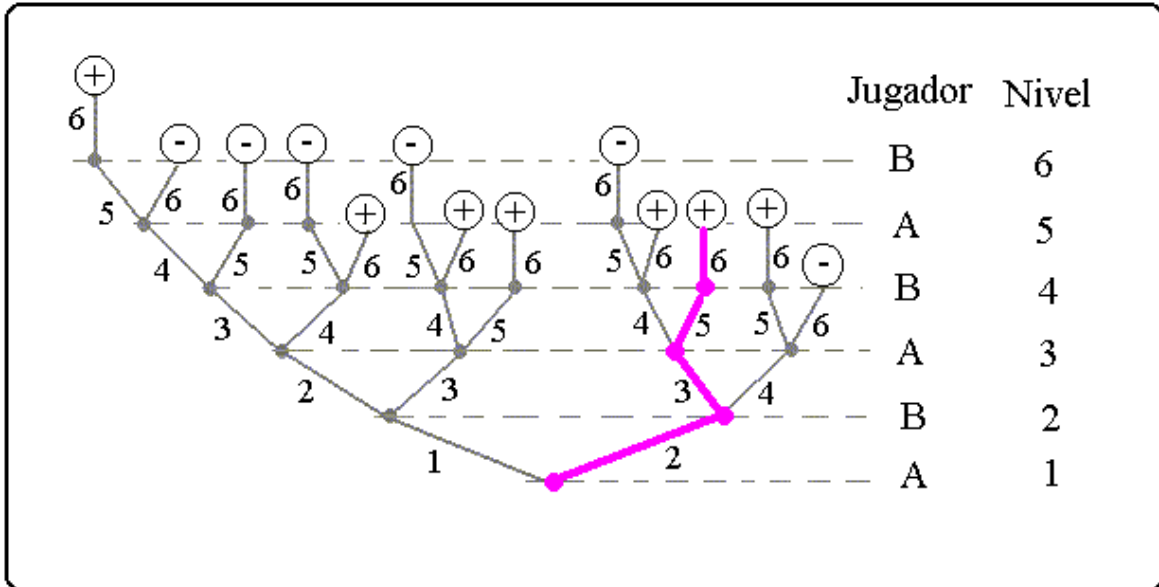


Fig. 1: Árbol asociado con el juego de los seis fósforos. La poligonal en color señala una partida que termina con la victoria de A.

Cabe observar que los objetos como el representado en la figura 1, se estudian matemáticamente dentro de una disciplina extensa conocida como teoría de grafos [5]. Sin embargo, no se necesita ahora aquí de tal teoría. En lo que concierne a la aplicación considerada, se construirá el árbol asociado con una variante simplificada del juego ya visto, que llamaremos *de los seis fósforos*:

Se tienen seis fósforos sobre la mesa; cada jugador en su turno toma uno o dos fósforos. El perdedor es el que se vea eventualmente obligado a levantar el último fósforo.

En la figura 1 se detalla el árbol asociado con este juego.

Los *vértices* del árbol representan las diversas situaciones que pueden suscitarse en una partida dada del juego. Las *ramas* que nacen en un vértice representan las elecciones posibles al alcance de cada jugador. Un vértice del que no emerjan ramas se llama *final* y se le asigna de inmediato el *resultado* “+”, “-“ o “0”, según resulte ganador A, B o resulte un empate respectivamente.

Todo vértice no final pertenece a un *nivel* k , donde k es un número natural. Un nivel puede ser *par* ($k = 2k$, para $k \geq 1$), o *impar* ($k = 2k+1$, para $k \geq 1$). Los niveles k y $k+1$ se llaman *contiguos*. Los niveles $2k-1$ y $2k+1$ se llaman *niveles impares contiguos*. Similar-

mente, los niveles $2k$ y $2k + 2$ se llaman *niveles pares contiguos*. Los niveles impares señalan las diversas posibilidades o alternativas que se le ofrecen al jugador A cuando le toca ejecutar una jugada, mientras que los niveles pares señalan lo propio para el jugador B. En el ejemplo analizado aquí, se tienen siempre dos posibilidades para cada jugada, excepto para la última.

La convención utilizada en el árbol de la figura 1 es la siguiente: la rama izquierda que parte desde cualquiera de los vértices corresponde a tomar *un* fósforo, y la derecha, a tomar *dos* fósforos. Una *partida* o *realización efectiva del juego completo*, es una poligonal que une el vértice inferior de inicio α (base del árbol) a uno de los vértices finales. La figura 1 muestra cada rama con el número total de fósforos que se han tomado en esa instancia de la partida.

Por ejemplo, la poligonal en trazo grueso representa la partida siguiente:

A	B	A	B
2	1	2	1

que consagra al jugador B como ganador.

El nivel más alto que se presenta en un árbol es por definición su *orden*, siendo igual a la longitud máxima de una partida del juego dado. Obsérvese que la propiedad 5 de la lista anterior establece que los juegos descritos por la misma son los de orden finito.

Aquí surge la primera observación formal. Un árbol como el de la figura 1 no solamente describe gráficamente el juego comentado, sino que se lo puede presentar como la *definición* misma de un juego como los de la lista anterior. Generalizando el concepto, la figura 2 muestra algunas variantes complementarias.

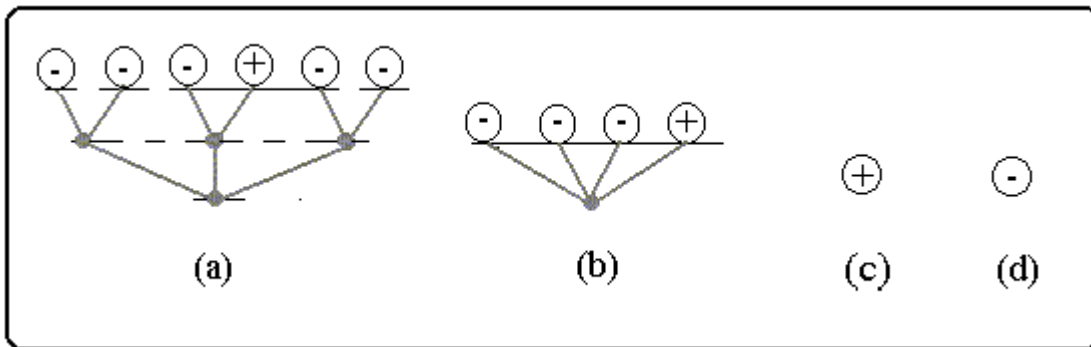


Fig. 2: Definición de juegos mediante sus árboles asociados

Por ejemplo, la figura 2-a define un juego en el cual toda partida consiste exactamente de dos jugadas: A comienza realizando una de tres jugadas posibles y a continuación, B realiza una de dos jugadas posibles. En este juego solamente existe una partida posible en la cual gana A. Ubicado a la derecha de este juego, el árbol de la figura 2-b presenta un juego que se desarrolla en una sola jugada. Tal como se verá en la sección siguiente, existen razones técnicas que sugieren la conveniencia de definir el denominado *juego vacío*, o sin jugadas, en donde ninguno de los jugadores hace nada, debido a lo cual el ganador es designado de manera arbitraria. Esta extensión del concepto se observa en los ejemplos de la figura 2-c y 2-d. Finalmente, es necesario observar que dado un árbol de juego arbitrario, todo vértice

ce no final del mismo puede considerarse base de un árbol construido a partir de las ramas que emergen del mismo. Esta estructura inducida se llama *subárbol con base en el vértice \mathbf{b}* , y define por derecho propio un juego.

Formalización del concepto de estrategia.

De manera imprecisa, la sección anterior introduce el concepto de estrategia de un juego. Allí se utilizan para tal fin palabras habituales del lenguaje objeto, es decir, del castellano. En conjunto, la expresión completa constituida por los términos utilizados en la tarea, no ofrece sin embargo ninguna garantía de ser impecable desde el punto de vista semántico o lógico.

El árbol de un juego, como entidad matemática abstracta, permite en cambio definir el concepto de estrategia de un juego con precisión total., sin ambigüedades de ninguna clase. Esto interesa porque allana el camino a posteriores refinamientos del concepto.

Recuérdese de los cursos de análisis [15], que un *vector fijo* en el plano es un segmento orientado, con origen en un punto \mathbf{a} y extremo en otro punto \mathbf{b} .

Sea dado ahora el árbol asociado con un juego dado. Sea \mathbf{a} un vértice no final ubicado en el nivel k y sea \mathbf{b} otro vértice ubicado en el nivel contiguo $k + 1$, ambos conectados por un segmento de rama. Se llama *flecha de origen \mathbf{a} y extremo \mathbf{b}* a un vector fijo con origen en el vértice \mathbf{a} y extremo en \mathbf{b} . Debe entenderse, luego, que las flechas se definen únicamente entre vértices pertenecientes a niveles contiguos conectados entre sí previamente por ramas. En este esquema, todo vértice que no es origen de ninguna flecha, se dice *solitario*.

Una *estrategia para el jugador A en un juego dado*, es un *conjunto de flechas definido sobre el árbol asociado*, que satisface las siguientes propiedades:

- (E1): Toda flecha de la estrategia tiene su origen en un vértice que pertenece a un nivel impar $2k - 1$, con $k \geq 1$. (Por definición de flecha, se observará que el extremo de cada una de ellas estará ubicada en algún vértice perteneciente al nivel par $2k$ contiguo, con $k \geq 1$.)
- (E2): Todo vértice \mathbf{a} perteneciente a un nivel impar $2k - 1$ es solitario o bien es origen de una flecha con extremo en algún vértice del nivel par $2k$ contiguo.
- (E3): Si existe un vértice no solitario \mathbf{a} en el nivel impar $2k - 1$, entonces tal vértice es la base de un subárbol en donde cada vértice del nivel impar sucesivo $2k + 1$ es origen de una flecha de la estrategia. (Obsérvese que esta propiedad permite que la estrategia ofrezca una alternativa al jugador A independientemente de la jugada elegida por B).

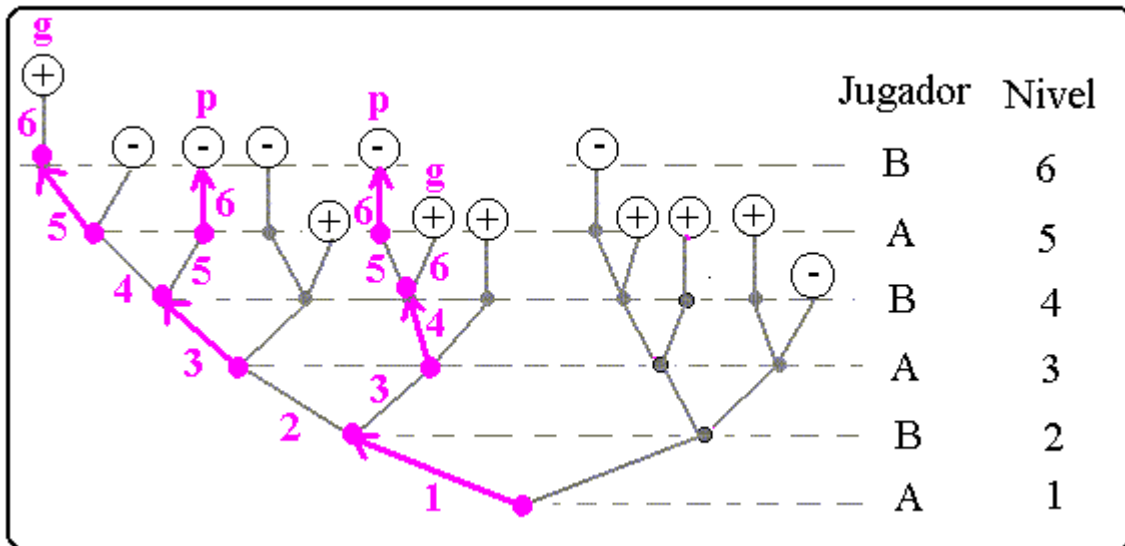


Fig. 3: Estrategia para A, consistente en levantar siempre un fósforo. Para facilitar el análisis, se han dejado los números que señalan la evolución de las partidas consecuentes.

Considérese nuevamente el juego de los seis fósforos. La figura 3 muestra la estrategia diseñada para A, consistente en *tomar siempre un fósforo*. Con algo de cuidado, se observa que esta estrategia proporciona dos partidas en las que A pierde y dos en la que gana, tal como lo señala la figura 3.

Naturalmente, como consecuencia de lo que se acaba de expresar para A, una estrategia para B se puede definir de manera análoga, considerando ahora flechas con origen en vértices de orden $2k$ ($k \geq 1$).

Un teorema sobre la existencia de estrategias victoriosas y sus alcances.

Teorema: Para todo juego que satisface las propiedades J1, J2, J3, J4 y J5, citadas anteriormente, existe una estrategia victoriosa para alguno de los jugadores involucrados.

Demostración: Se razona inductivamente sobre el orden n de los juegos, es decir, sobre la longitud de la partida más larga admisible en los mismos. En primer lugar, debe verse que el teorema es cierto para los juegos de menor orden posible, es decir aquellos de orden nulo ($n = 0$). Una simple inspección visual realizada sobre la figura 2, muestra que para n existen únicamente dos juegos posibles: aquellos señalados individualmente en (c) y en (d). En el primero, gana el jugador A y en el segundo gana el jugador B. Luego, el teorema es cierto para $n = 0$.

Supongamos válido el teorema para todos los juegos de la clase tratada que poseen orden n , es decir: *para todo juego de tal orden como máximo, el jugador A o el B posee una estrategia victoriosa*. Esta es precisamente la hipótesis inductiva. Debe verse ahora que el teorema es cierto para todos los juegos analizados de orden $n + 1$. El árbol asociado con uno de estos juegos tiene el aspecto de la figura 4.

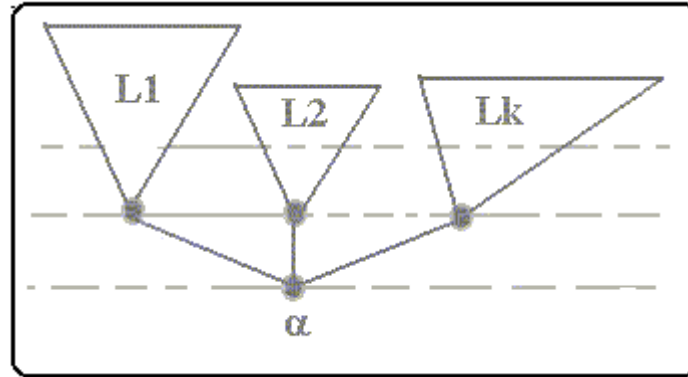


Fig. 4: árbol de orden $n+1$ basado en α .

En un juego de orden $n + 1$ como el señalado en la figura 4, de la base α (ubicada en el nivel 1) emergen ramas que llegan a cada uno de los vértices del nivel 2. Cada uno de estos vértices da origen a un subárbol de orden a lo sumo n . Ahora bien, todos estos subárboles definen por sí mismos juegos L_1, L_2, \dots, L_k , señalados en la figura 4, donde vale la hipótesis inductiva. Es decir, para todos estos juegos, A o bien B tienen una estrategia ganadora. Si A tiene una estrategia ganadora para todos ellos, entonces tiene de manera evidente una estrategia ganadora para el juego completo, pues al conjunto restringido de flechas que comienzan en el nivel 2 de los juegos restringidos (que corresponden al nivel 3 del juego ampliado), se le adjuntan todas las flechas basadas en α . Si resultara que B tiene una estrategia ganadora para todos los juegos L_1, L_2, \dots, L_k , entonces tiene de manera obvia una estrategia para el juego ampliado, pues simplemente el nivel 2 de éste corresponde al primer nivel de todos los juegos asociados con subárboles de nivel $n-1$, **qed**.

El expresivo resultado anterior sobre la existencia de una estrategia victoriosa, tiene no obstante una demostración sencilla debido a la clase muy particular de juegos tratados. En éstos, la propiedad J4 resulta esencial, ya que establece que en cualquier momento ambos jugadores tienen toda la información concerniente al pasado y al presente de la confrontación. Desde el punto de vista matemático, debe decirse que esta exigencia es sumamente restrictiva. De hecho, se observará de inmediato que los antagonistas que protagonizan un conflicto de intereses en la vida real, en general, poseen una cantidad limitada e imperfecta de la información concerniente al conflicto.

La propiedad J4 caracteriza precisamente a los denominados *juegos con información perfecta*. El teorema brindado, de todas maneras, suministra la certeza de que para esta clase de juegos siempre hay una estrategia victoriosa para alguno de los participantes, aunque no muestre la manera constructiva para encontrarla. En particular, esto es cierto para el ajedrez, si se acepta que la cantidad de partidas máxima es finita, tal como es de rigor en los campeonatos mundiales. Esta condición, como corolario del teorema visto, implica que hay una estrategia ganadora para blancas o para negras. Sin embargo, la tarea de encontrarla es tan compleja y de tan pocas posibilidades prácticas, que desde el punto de vista real o cotidiano siguen teniendo pleno sentido las confrontaciones ajedrecísticas entre los grandes maestros internacionales.

En la segunda parte, se analizarán los juegos de información imperfecta, que son los que provee la vida real para la mayoría de los conflictos que se suscitan entre dos intelligen-

cias con intereses opuestos. Y dentro de estos, una categoría muy importante. Los juegos de suma cero.

<http://www.rinconmatematico.com>

<http://www.rinconmatematico.com/foros>