Desigualdades
§5 Medias potenciales
Korovkin

Ya en el §2 (medias geométrica, aritmética y otras medias) antes de ver el problema 7 hemos señalado que el número

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

se denomina media potencial de grado α de los números positivos $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$. Al mismo tiempo hemos demostrado (problema 7) que $c_\alpha \leq c_\beta$ si $\alpha < 0 < \beta$.

Ahora demostraremos que la desigualdad

$$c_\alpha \leq c_\beta$$

es válida siempre que $\alpha < \beta$. En otras palabras, la media potencial de grado α crece monótonamente a medida que aumenta α.

Teorema 4. *Si* $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y $\alpha < \beta$, se tiene $c_\alpha \leq c_\beta$ con la particularidad de que $c_\alpha = c_\beta$ sólo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demostración. *El teorema ha sido ya demostrado para el caso en que los números* α *y* β *tienen signos opuestos (véase el problema 7 del* §2 *y la definición que le precede). Resta demostrar el teorema para* α *y* β *del mismo signo.*

Supongamos que $0 < \alpha < \beta$ y pongamos

$$k = c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dividiendo c_β entre k, encontramos

$$\frac{c_\beta}{k} = \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Tomando ahora

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha,\quad d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha, \ldots, d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha$$

obtenemos

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (15)$$

Puesto que

$$\left(\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$\left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^{\alpha} + \left(\frac{a_2}{k}\right)^{\alpha} + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{k}c_\alpha = \frac{1}{c_\alpha}c_\alpha = 1,$$

resulta

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} = 1, \text{ o sea, } d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n.$$

Pongamos

$$d_1 = 1 + x_1, \quad d_2 = 1 + x_2, \ldots, d_n = 1 + x_n$$

De la igualdad

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n$$

se deduce que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

En virtud del teorema 3, notemos que $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, tenemos

$$(*) \qquad \begin{cases} d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_1 \\ d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_n \end{cases}$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n \qquad (16)$$

De (15) y (16) se deduce que

$$\frac{c_\beta}{k} \geq \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1 \text{, o sea, } c_\beta \geq k = c_\alpha .$$

Notemos que $c_\beta = k = c_\alpha$ sólo si en todas las desigualdades (*) tiene lugar el signo de igualdad, es decir, si $x_1 = x_2 = . . . = x_n = 0$ (teorema 3) . En este caso, se tiene $d_1 = d_2 = . . . = d_n = 1$ y, por consiguiente, $a_1 = a_2 = . . . = a_n = k$. En cambio, si los números $a_1, \ a_2, . . . , a_n$ no son iguales, se tiene

$$c_\beta > c_\alpha$$

Con esto, el teorema queda demostrado para el caso en que $0 < \alpha < \beta$.

Si $\alpha < \beta < 0$, tenemos $0 < \dfrac{\beta}{\alpha} < 1$. Repitiendo los razonamientos anteriores, obtendremos en (*) y (16) signos de desigualdad opuestos. Pero como $\beta < 0$, de la desigualdad

$$\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + . . . + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leq 1$$

se deduce que

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + . . . + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq 1^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

es decir,

$$c_\beta \geq k = c_\alpha$$

Con esto el teorema queda demostrado completamente.

En lo que sigue la media geométrica será denominada *media potencial de grado cero*, o sea, se tomará $g = c_0$.

Notemos que el teorema 4 subsiste también en este caso, ya que (problema 7 del § 2, $c_\alpha \leq g = c_0$ si $\alpha < 0$, y $c_\beta \geq g = c_0$ si $\beta > 0$.

Del teorema demostrado se deduce, en particular, que

$$c_{-1} \leq c_0 \leq c_1 \leq c_2$$

es decir, la media armónica no pasa de la media geométrica, la media geométrica no sobrepasa la media aritmética, y la media aritmética no supera a la media cuadrática de números positivos. Por ejemplo si $a_1 = 1, \ a_2 = 2$ y $a_3 = 4$, se tiene

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7} = 1,7...,$$

$$c_0 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{1.2.4} = 2$$

$$c_1 = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,3...$$

$$c_2 = \left(\frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+4+16}{3}} = \sqrt{7} = 2,6...$$

y, por consiguiente,

$$c_{-1} = 1,7... < 2 = c_0 < 2,3... = c_1 < 2,6 = c_2.$$

Problema 1. Demostrar que $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ si $x + y + z = 6$.

Solución. Puesto que la media aritmética no pasa de la media cuadrática, tenemos

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

es decir,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3},$$

En nuestro caso $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{6^2}{3} = 12$. El signo de igualdad tiene lugar sólo si $x = y = z = 2$.

Problema 2. Demostrar que siendo $x,$ y y z números positivos y $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, se tiene

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Solución. Debido a que $c_2 \leq c_3$, tenemos

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

En nuestro caso resulta

$$\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \geq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

es decir,

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Problema 3. Demostrar que para los números positivos $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,a_n$, se cumplen las desigualdades

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^{\alpha} \leq n^{\alpha-1}\left(a_1^{\ \alpha} + a_2^{\ \alpha} + \ldots + a_n^{\ \alpha}\right), \qquad \alpha \geq 1 \qquad (17)$$

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^{\alpha} \geq n^{\alpha-1}\left(a_1^{\ \alpha} + a_2^{\ \alpha} + \ldots + a_n^{\ \alpha}\right), \qquad 0 < \alpha \leq 1 \qquad (18)$$

Solución. Si $\alpha > 1$, tenemos

$$c_{\alpha} = \left(\frac{a_1^{\ \alpha} + a_2^{\ \alpha} + \ldots. + a_n^{\ \alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots. + a_n}{n} = c_1$$

Es fácil de deducir de aquí la desigualdad (4.7) De la misma forma se demuestra la desigualdad (4.8). En particular, de las desigualdades (4.7) y (4.8) resulta que

$$\left(x + y\right)^{\alpha} \leq 2^{\alpha-1}(x^{\alpha} + y^{\alpha}), \qquad \alpha \geq 1 \quad x > 0 \quad y > 0$$

$$\left(x + y\right)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}(x^{\alpha} + y^{\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1 \quad x > 0 \quad y > 0$$

Problema 4. Demostrar que si $x^3 + y^3 + z^3 = 81,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$, se tiene

$$x + y + z \leq 9$$

Solución. Puesto que

$$\left(x + y + z\right)^3 \leq 3^2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) = 9.81 = 729$$

según la desigualdad (4.7), resulta

$$x + y + z \leq \sqrt[3]{729} = 9..$$