Problema : Sea $f:[a,b]\to IR$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), tal que $f'(x)\geq 0$ sobre (a,b) y $f'(x)>0$ para al menos un valor de x. Probar que $f(a)<f(b)$.

Solución : Observando las condiciones de continuidad y derivabilidad de la función y según la definición de derivada se puede mostrar que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \forall x\in(a,b)$$

luego, según el enunciado $f'(x)>0$ para al menos un valor de x, si denotamos a este valor de x por c, se tiene que

$$f'(c)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0,\ c\in(a,b)$$

si se considera que IR es un conjunto denso se puede pensar que debe existir a lo menos un valor $x_0>c$ en las vecindades de c tal que

$$f'(c)\approx\frac{f(x_0)-f(c)}{x_0-c}>0$$

con lo anterior es claro que

$$f(x_0)-f(c)>0$$
$$\Rightarrow f(c)<f(x_0)$$

si luego de esto se observa que $f'(x)\geq 0$ sobre (a,b) , con $a<b$, se puede afirmar lo siguiente

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0,\forall x\in(a,c]$ y análogamente que $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}\geq 0,\forall x\in[x_0,b)$

de esto se obtiene que $f(c)\geq f(a)$ y además que $f(x_0)\leq f(b)$

$\Rightarrow f(a)\leq f(c)<f(x_0)\leq f(b)$

$\therefore f(a)<f(b)$