

Problema de Octubre de 2003

Probar que cualesquiera sean los naturales K y n , existe un polinomio P no constante de grado menor o igual que n , cuyos coeficientes son enteros menores que K y mayores que $-K$, tal que $P(\pi)$ dista de un número entero en menos de $\left(\frac{1}{K}\right)^n$.

Cuando estaba en la escuela secundaria, durante cierta clase aburrida, me puse a jugar con la calculadora buscando fracciones que aproximaran bien el valor de π . Yo conocía dos, bastante populares: $22/7$ y $355/113$, que nos llegaron a través de los griegos y de los árabes respectivamente, y que de hecho constituyen las que mejor aproximan con denominador entre 1 y 99 y con denominador entre 1 y 999. Esto último no lo sabía — lo acabo de averiguar usando el Maple (y de hecho puedo agregar que $355/113$ también es la mejor entre 1 y 9999) pero sospechaba que si hubiera otras con denominador de 2 ó 3 dígitos, sería a esta altura muy famosa, de modo que probablemente no la hubiera. Por lo tanto mi búsqueda tenía lugar con fracciones de denominador de 4 ó 5 dígitos, siempre sin saber si había razones que hicieran seguro, o al menos probable, que yo las encontrara en caso de disponer de suficiente tiempo — y como la clase se me hacía eterna, me parecía muchísimo el tiempo que tenía para hacerlo.

Podemos notar que el resultado del problema del mes se relaciona con dicha cuestión.

En efecto, consideremos el caso lineal, es decir con $n = 1$, y pongamos $K = 100000$. Entonces existe un polinomio de grado 1, es decir una función lineal $P(x) = mx + b$ con m y b enteros tal que para cierto entero w vale

$$|P(\pi) - w| < \frac{1}{100000},$$

o sea

$$|m\pi + b - w| < \frac{1}{100000}$$

siendo además

$$|m| < 100000$$

Nótese que b siempre puede considerarse entre -100000 y 100000 , ya que eventualmente renombramos

$$\bar{b} = 1 \text{ y } \bar{w} = b - w - 1$$

Llamando ahora $q = m$, $p = -b + w$, queda

$$|q\pi - p| < \frac{1}{100000},$$

o equivalentemente,

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{|q| \cdot 100000}$$

Está claro que podemos suponer p, q ambos positivos.

Como no hay ninguna fracción con denominador menor que 100 que aproxime mejor que $22/7$, y la misma no aproxima con error menor que

$$\frac{1}{100000} > \frac{1}{q \cdot 100000} \quad (1 \leq q \leq 99)$$

y no hay ninguna con denominador entre 100 y 999 que aproxime mejor que $355/113$, y ésta no lo hace con error menor que

$$\frac{1}{100 \cdot 100000} > \frac{1}{q \cdot 100000} \quad (100 \leq q \leq 999),$$

la tesis del problema propuesto debe verificarse para algún q entre 1000 y 99 999 (es decir de 4 ó 5 cifras).

¡Y la aproximación será con error menor que

$$\frac{1}{100 \cdot 100000} = 10^{-8} !$$

De hecho la fracción $\frac{208\ 341}{66317}$ cumple lo pedido, y aproxima a π con

error menor que 10^{-10} .

Álvaro Corvalán acorvala@dm.uba.ar

Rincón matemático <http://www.rinconmatematico.com>