Este artículo forma parte de "Notas al Capítulo V" del agotado Tomo I de Análisis Matemático de Julio Rey Pastor, Pi Calleja y César A. Trejo, p. 330 y ss.

En esta primera entrega se introducen las matrices de Toeplitz y se muestra la enorme potencia de las transformaciones de Toeplitz al probar con poco esfuerzo conocidos teoremas sobre sucesiones.

Algoritmos generales de convergencia y sumación.

a) Transformación de Toeplitz.

Teorema 1. *Si una matriz infinita de números reales o complejos*

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} & \dots \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

cumple las condiciones:

$a_1)$ *Cada columna tiene límite nulo, es decir*

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,p} = 0 \quad p = 1,\ 2,\ 3,\ \dots;$$

$a_2)$ *Existe una constante K, independiente de n, tal que para todo* $n > 0$ *es*

$$|t_{n,1}| + |t_{n,2}| + \dots < K;$$

entonces, cualquier sucesión real o compleja $\{s_n\}$ *de límite nulo,* $s_n \to 0$*, se transforma por la matriz* T *en una sucesión:*

[1] $$t_n = t_{n,1}s_1 + t_{n,2}s_2 + \dots = \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}s_p$$

que también tiene límite nulo, $t_n \to 0$.

Obsérvese que la condición $a_2)$ implica la convergencia absoluta de las series formadas con los elementos de cada fila:

$$\tau_n = \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\ .$$

Teorema 2. *Si la matriz* T *, además de cumplir las condiciones* $a_1)$ y $a_2)$ *, cumple la condición*

$a_3)$ $$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau \quad (\tau \text{ finito})$$

entonces, toda sucesión real o compleja $\{s_n\}$ *de límite finito* s*, es decir* $s_n \to s$ *, se transforma por la matriz T en una sucesión* **[1]** *que tiene límite* τs *, es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\, s_p\right) = \tau s \,.$$

Teorema 3. *Si la matriz* T *tiene todos sus elementos reales no negativos, y además cumple las condiciones* $a_1)$ *y* $a_2)$*, entonces:*
Toda sucesión $\{s_n\}$ *de elementos reales, transformada por* **[1]** *en la* $\{t_n\}$ *, verifica*

[2] $$\liminf\, (\tau s_n) \le \liminf t_n \le \limsup t_n \le \limsup\, (\tau s_n)$$

Las matrices que originan la transformación **[1]** en las tres condiciones $a_1), a_2)$ y $a_3)$ se llaman *matrices* ***T*** o de Toeplitz (1911).
Si se toma $t_{n,p} = \dfrac{1}{n}$ para $p \le n$, $t_{n,p} = 0$ para $p > n$, se obtiene una matriz T que cumple las condiciones de hipótesis de los tres teoremas anteriores con $\tau = 1$, y origina una transformación, ya estudiada por Cauchy (1821) de una sucesión $\{s_n\}$ en las de las medias aritméticas de sus *n* primeros términos

$$\left\{\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}\right\}$$

Obsérvese que en el *teorema 3*, la condición $a_3)$ *implica la* $a_2)$, y que en los teoremas 1 y 2, por conservarse acotados los términos $\{s_n\}$, la condición $a_2)$ asegura la convergencia absoluta de las series **[1]**, es decir, la existencia de la sucesión transformada $\{t_n\}$.

Demostración del teorema 1.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $m = m(\varepsilon)$ tal que para $p > m$ se conserve $|s_p| < \varepsilon / 2K$.
Entonces por $a_2)$ es:

$$t_{n,\, m+1}\, s_{m+1} + t_{n,\, m+2}\, s_{m+2} + \ldots < \left(t_{n,\, m+1} + t_{n,\, m+2} + \ldots\right)\frac{\varepsilon}{2K} \le \frac{1}{2}\varepsilon \,,$$

para cualquier *n* , y podremos poner:

$$|t_n| < \left|t_{n,\,1}\, s_1 + t_{n,\,2}\, s_2 + \ldots + t_{n,\,m}\, s_m\right| + \frac{1}{2}\varepsilon \,.$$

Por $a_1)$ se puede tomar $|t_{n,p}| < \dfrac{\varepsilon}{2mc}$, $p = 1, 2, \ldots, m$ para todo $n > \nu(\varepsilon)$, en que $c > |s_p|$, $p = 1, 2, \ldots, m$.
Por lo tanto, $\left|t_{n,1}s_1 + \ldots + t_{n,m}s_m\right| < cm\varepsilon / 2mc = \varepsilon/2$; es decir: $|t_n| < \varepsilon$ si $n > \nu(\varepsilon)$, como queríamos demostrar.

Demostración del teorema 2.

Expresemos $s_p = s + \delta_p$ con $\delta_p \to 0$; entonces en [1] se tiene

$$t_n = \tau_n s + \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\,\delta_p .$$

La condición $a_2)$ asegura que el primer sumando del último miembro tiende a τs, mientras que la suma de la serie $\sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\,\delta_p$ tiende a cero para $n \to \infty$ por el teorema 1, lo que demuestra el teorema 2.

Demostración del teorema 3.

Probemos, por ejemplo, la primera desigualdad [2] .
Supuesto $\liminf s_n = s > -\infty$, sea un número cualquiera $c < s$.
Entonces, $s_p > c$ para $p > m = m(c)$, y por ser los elementos de T reales no negativos, es

$$t_n \geq (t_{n,1}\,s_1 + \ldots + t_{n,m}\,s_m) + (t_{n,m+1} + t_{n,m+2} + \ldots)c \text{, para } \textit{cualquier } n .$$

Fijado m, para $m > \nu(\delta, c)$ por $a_1)$ y $a_2)$ queda $t_n > \tau c - \delta$, y por ser $\delta > 0$ arbitrario, es $\liminf t_n \geq \tau c$, es decir:

$$\liminf t_n \geq \liminf \tau s_n .$$

Para una matriz que tenga elementos no todos positivos o nulos, puede no ser cierto el teorema 3.

Ejemplo 1. La matriz T, de elementos

$$t_{2n+1,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2r+1 \\ 0 & \text{si } p \neq 2r+1 \end{cases} \qquad t_{2n,p} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad p = 2r \\ 2 & \text{si} \quad p = 2r+1 \\ 0 & \text{para los demás } p \end{cases}$$

cumple las condiciones $a_1), a_2),$ y $a_3)$, con $\tau = 1$. Pruébese que la sucesión

$$s_{2r} = 0,\ s_{2r-1} = (-1)^{r+1},\ r = 1, 2, 3, \ldots,$$

se transforma por [1] en

$$t_{2r} = 2(-1)^r,\ t_{2r-1} = (-1)^{r+1},\ r = 1, 2, 3, \ldots,$$

y no se cumple la conclusión [2].

Sin embargo, subsisten para esta matriz T los teoremas 1 y 2.

Si la matriz T hubiese tenido como elementos $t_{n,p} = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n, \end{cases}$
se cumpliría el teorema 1, pero no el teorema 2, y por consiguiente, tampoco el teorema 3, como se comprueba tomando $s_n = 1$ constante, mientras que $t_n = (-1)^{n+1}$ oscila.

b) Medias aritméticas y geométricas.

El resultado de Cauchy antes mencionado, referido al teorema 2, dice:

Si una sucesión real o compleja $\{s_n\}$ *tiene límite* s *, entonces la sucesión de medias aritméticas de los* n *primeros términos tiene el mismo límite,* $\dfrac{s_1 + s_2 + ... + s_n}{n} \to s$

Análogamente se formula el teorema 3 para este caso

Si $s_n > 0$, resulta $\sqrt[n]{s_1.s_2....s_n} \to s$, como se verifica tomando logaritmos, es decir, también *las medias geométricas de los n primeros términos de una sucesión convergente de términos positivos* $s_n > 0$ *, tiene el mismo límite.*
Como corolario importante obtenemos:

Si en una sucesión cualquiera de términos positivos existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \gamma$ *, entonces es* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \gamma$.

Porque la media geométrica de $a_1, \dfrac{a_2}{a_1}, ..., \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ es

$$\sqrt[n]{a_1.\frac{a_2}{a_1}....\frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n} \quad .$$

Ejemplo 2. Para demostrar que $\sqrt[n]{n} \to 1$, basta ver que $\dfrac{n}{n-1} \to 1$.

Obsérvese que el recíproco del corolario anterior puede no ser cierto:
Así, para $a_{2p} = 1/2^p$, $a_{2p-1} = 1/2^p$, $p = 1,2,3,...,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ no existe, pues $\limsup \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ y $\liminf \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{2}$, mientras que es $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2}$.

c) Más generalmente, suponiendo como antes $s_n \to s$, y elegida una sucesión de números *positivos* $b_n > 0$, tales que $B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n \to +\infty$, se verifica:

$$\lim \frac{b_1 s_1 + b_2 s_2 + ... + b_n s_n}{B_n} = s$$

Porque la matriz de elementos $t_{n,p} = b_p / B_n$, si $p \le n$, $t_{n,p} = 0$, si $p > n$, cumple las hipótesis a_1), a_2), a_3) con $\tau = 1$.

Para $s_n = a_n / b_n$ deducimos el corolario:

Si es $b_n > 0$ con $b_1 + b_2 + ... + b_n \to +\infty$, entonces

$$\lim a_n / b_n = \gamma \text{ implica } \quad \lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \gamma$$

Ejemplo 3. Si en la potencia de un binomio tomamos $a = b = 1$, resulta

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n},$$

y por lo tanto, si $s_n \to s$, también

$$\frac{\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \ldots + \binom{n}{n} s_n}{2^n} \to s$$

Ejemplo 4. Si se toma $a_n = \log(n+1), \quad b_n = (n+1)\log(n+1) - n\log(n)$, con logaritmos de base mayor que 1, resulta

$$\frac{\log(n!)}{\log(n^n)} \to 1.$$

Stirling mejoró esta fórmula, útil para el cálculo de factoriales grandes.

Preparado por Mario Augusto Bunge para **http://www.rinconmatematico.com**
Por inquietudes surgidas por este u otro artículo te invitamos a participar en los foros
http://www.rinconmatematico.com/foros