http://www.rinconmatematico.com

La fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros números naturales obtenida visualmente

Mario Augusto Bunge
Universidad de Buenos AIres
Ciclo Básico Común
Departamento de Matemática
mariobunge@hotmail.com

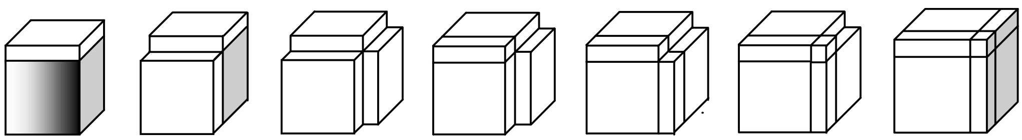
Probar por inducción completa la validez de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

no parece ayudarnos a comprender cómo llegar a conjeturar esta relación. Intentamos acá una aproximación geométrica.

Obteniendo el cubo de lado $x+h$ a partir del cubo de lado x

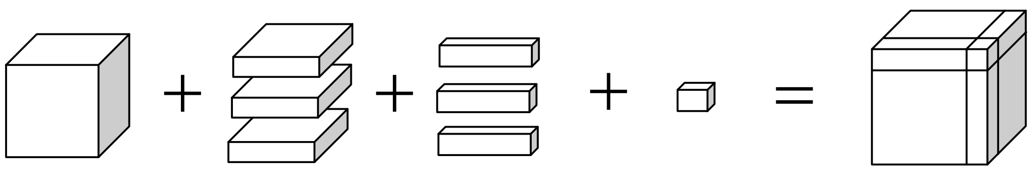
De un cubo de lado x pasaremos a un cubo de lado $x+h$, conforme al procedimiento que sugieren las figuras, y que detallamos más abajo.



Tomamos tres rebanadas de sección cuadrada $x \times x$ y espesor h pegándolas sobre el cubo tal como se ve en la figura. Hecho esto, quedan a la vista tres “dientes”. Rellenamos los dientes con tres lingotes de largo x y sección $h \times h$.

En el encuentro de los tres lingotes queda todavía un vacío, que debemos rellenar con un pequeño cubo de lado h. De esta manera arribamos al nuevo cubo, ahora de lado $x+h$.

Así, el cubo de lado $x+h$ se obtiene del cubo de lado x adosándole la cubierta consistente en esas tres rebanadas, más los tres lingotes, más el cubito.



El volumen del nuevo cubo

Cada una de las tres rebanadas tiene volumen $x^2 h$, mientras cada uno de los tres lingotes es de volumen $x h^2$ y finalmente tenemos el cubito, con volumen h^3.

Vemos así que el volumen del nuevo cubo se puede expresar haciendo intervenir la suma de los volúmenes de los constituyentes de la cubierta:

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2 h + 3x\, h^2 + h^3$$

Hemos obtenido de esta forma una representación geométrica del desarrollo del cubo del binomio, para el caso en que ambos parámetros son positivos.[1]

En el particular caso en que el lado es un valor entero, digamos k , y el módulo de avance es $h=1$, se tiene

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Desde acá en adelante, nos concentraremos en los cubos de lados enteros.

Avanzando por capas

Antes de continuar, miremos bien las muñecas rusas:[2]

Como se sabe, la más pequeña se puede guardar en la que le sigue en tamaño, y así sucesivamente, siendo así posible que la mayor guarde en su seno a todas las demás.

Una vez miradas las muñecas, estamos en condiciones de continuar.

Llamaremos Q_k al cubo de lado k (más brevemente, el k-cubo), y C_k a la cubierta de espesor unitario formada por las ya mencionadas rebanadas, lingotes y el cubito unitario. Con esta notación

$$Q_{k+1} = Q_k + C_k$$

[1] “Aunque estos diagramas son tan viejos como el álgebra, es sorprendente lo muy escasos que son los profesores que se molestan en mostrárselos a sus alumnos”. Martin Gardner en Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas. Editorial Labor 1987.

[2] Busque matrioshka con el Google, y dentro del Google vaya a la opción “imágenes”.

Además, el volumen de la capa k -ésima es

$$|C_k| = 3k^2 + 3k + 1.$$

Como hemos visto, cada cubo con $k > 1$ se descompone en el cubo anterior más su cubierta asociada y así tenemos:

$$Q_2 = Q_1 + C_1$$

$$Q_3 = Q_2 + C_2$$

Pero, como $Q_2 = Q_1 + C_1$, podemos poner

$$Q_3 = Q_1 + C_1 + C_2$$

con lo que el *3-cubo* queda realizado como el *1-cubo* más las dos primeras capas.

Razonando de igual forma,

$$\begin{aligned} Q_4 &= Q_3 + C_3 \\ &= Q_1 + C_1 + C_2 + C_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y así sucesivamente. De esta forma llegamos a:

El cubo inicial, junto con sus n capas, producen el cubo n+1 - ésimo

$$Q_{n+1} = Q_1 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$$

de donde, finalmente:

El volumen del "último" cubo se obtiene sumando, al volumen del cubo inicial, el volumen de sus capas [3]

$$|Q_{n+1}| = |Q_1| + |C_1| + |C_2| + |C_3| + \ldots + |C_n| \qquad (*)$$

Ahora observemos que siendo

$$|C_k| = 3k^2 + 3k + 1,$$

al dar a k sucesivamente los valores *1, 2, ..,n*, podemos obtener el volumen total de las capas:

[3] ¿Esto le recuerda a las muñecas rusas?

$$|C_1|+|C_2|+|C_3|+...+|C_n| =$$

$$[3.1^2 + 3.1+ 1] \;+\; [3.2^2 + 3.2 + 1] \;+\; [3.3^2 + 3.3 + 1]$$
$$+ [3.4^2 + 3.4 + 1] \;+\; .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;+\; [3.n^2 + 3.n + 1]$$

Llegado este momento, y pensando en los lectores con poca experiencia con sumas como estas, reacomodaremos la misma suma, mostrándola en columnas [4].

$$\begin{array}{rcccccc} \multicolumn{7}{l}{|C_1|+|C_2|+|C_3|+...+|C_n| =} \\ = & 3.1^2 & + & 3.1 & + & 1 \\ + & 3.2^2 & + & 3.2 & + & 1 \\ + & 3.3^2 & + & 3.3 & + & 1 \\ + & 3.4^2 & + & 3.4 & + & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ + & 3.n^2 & + & 3.n & + & 1 \end{array}$$

Sumando la columna izquierda tenemos el triple de 1^2, el triple de 2^2, el triple de 3^2, hasta el triple de n^2, lo que podemos poner también como $3T$, donde abreviamos

$$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 .$$

La columna central nos da el triple de 1, el triple de 2, etc., hasta el triple de n, lo que sumado nos da $3S$, donde hemos puesto

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Por último, la columna derecha está formada por unos, y como hay *n* sumandos, la suma nos da exactamente n.

Ya falta poco…

Volviendo a (*), y habida cuenta que $|Q_{n+1}| = (n+1)^3$ y $|Q_1| = 1$, (*) se transforma en

$$(n+1)^3 = 1 + 3T + 3S + n$$

O bien:

$$3T = (n+1)^3 - (n+1) - 3S \qquad (**)$$

Recuérdese también la conocida fórmula para la suma de los primeros *n* naturales:

$$S = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

[4] Resulta innecesario esperar que el alumno conozca el significado de la sumatoria.

Ahora en (**) todo es conocido, salvo T , que es precisamente lo que nos proponemos conocer.

$$3\,T = (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Resistimos a la tentación de desarrollar el cubo de $n+1$, pero aprovechamos que $n+1$ está presente en todos los sumandos,

$$3\,T = (n+1)\left\{(n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right\}$$

Este es el momento oportuno para desarrollar paréntesis y reagrupar:

$$3\,T = (n+1)\left\{ n^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right) n \right\}$$

$$= (n+1)\; n \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{(n+1)\; n\;(2n+1)}{2}$$

de donde

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

y recordando quién es T , se tiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Que es lo que queríamos obtener.