Sucesiones sumables (Series)

Mario Augusto Bunge
Ciclo Básico Común
Universidad de Buenos Aires

El símbolo de sumatoria

Supóngase dada una cantidad finita de números, digamos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y consideramos su suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

En ocasiones es conveniente más hacer breve esta expresión, y esto se logra mediante el símbolo de suma $\sum$, llamado *sumatoria*, cuya utilización pasamos a describir.
Pondremos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

En el especial caso en que sea $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$.
El elemento a_k se llama *término general* de la suma y, en muchos casos prácticos, es preciso conocer el aspecto de este término general.
El número k que figura debajo del símbolo $\sum$ se llama *índice de sumación*, y entendemos que los valores que toma este índice son 1, 2, …, n
Más generalmente, si p y q son dos números enteros, con $p \leq q$, pondremos

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$

En este contexto, el número p se llama límite inferior de la suma , en tanto q es el límite superior de esa suma.

Ejemplos.

a) Se quiere expresar la suma de los cuadrados de los primeros 10 naturales:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2$$

o sea,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

Como es fácil ver, el *término general* es $a_k = k^2$, con lo que nuestra suma puede adquirir el aspecto más descansado $\sum_{k=1}^{10} k^2$. Así, se tiene la igualdad

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2,$$

donde el lado izquierdo debe entenderse como una notación más compacta del lado derecho.

Si queremos considerar solamente $3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$ pondremos

$$\sum_{k=3}^{10} k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$$

b) La suma $\underbrace{p+p+\cdots+p}_{n \text{ sumandos}}$, con la notación de sumatoria, se escribe $\sum_{k=1}^{n} p$, lo cual no nos debiera sorprender durante demasiado tiempo. La apariencia anómala se debe a que no figura algo así como a_k , cosa que se subsanaría formalmente definiendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = p$. Claramente esta precisión sería tediosa y absolutamente inútil. Con esta notación, $\sum_{k=3}^{7} 1 = 5$, ya que estamos sumando el número 1 a medida que avanza el índice de sumación: $k = 3, 4, 5, 6, 7$ habiendo entonces $(7-3)+1$ sumandos. Por lo mismo, el lector entenderá las igualdades $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ y $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

c) Fijemos un número real r , y consideremos sus primeras potencias

$$r^0, \ r^1, \ r^2, \ r^3, \ r^4, \ \ldots, \ r^n$$

Utilizando la notación estándar para su suma, se tiene

$$r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^n .$$

Con la notación compacta, y teniendo presente que el término general es r^k , ponemos

$$\sum_{k=0}^{n} r^k .$$

Así

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

Como $r^0 = 1$ y $r^1 = r$, será más natural poner

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

Volveremos sobre esta suma.

Observación. Una vez familiarizados con la notación sumatoria, debe resistirse a la tentación de abandonar definitivamente la notación tradicional. En ocasiones las manipulaciones son más claras cuando se hacen al estilo clásico. Por lo tanto, seremos dueños, y no esclavos, del símbolo de sumatoria.

Propiedades elementales de la sumatoria

Sean dos listas finitas de números, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

- *Aditividad (suma término a término)*

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- *Homogeneidad (sacar los escalares afuera)*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\lambda \text{ es un número fijo})$$

Prueba de la aditividad.

Surge de la definición de suma, más una aplicación reiterada de las conocidas propiedades asociativa y conmutativa de la suma

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + b_k\right) &= \left(a_1 + b_1\right) + \left(a_2 + b_2\right) + \cdots + \left(a_n + b_n\right) \\ &= \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) + \left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

Prueba de la homogeneidad.

Se basa solamente de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Combinando ambas propiedades, se obtiene la también llamada *linealidad:*

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha a_k + \beta b_k\right) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (\alpha, \beta \text{ reales fijos})$$

Ejemplos.

a) $\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 5^k\right) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 5^k = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 5^k$

b) $\sum_{k=1}^{n}\left(2k + 1\right) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$ (tener presente que $\sum_{k=1}^{n} 1$ es la suma de n unos: $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$)

Sumas parciales y recurrencia

Supóngase que se tiene una lista de números reales, digamos

$$a_1, \quad a_2, \dots, a_n, \quad a_{n+1}, \dots$$

Podemos considerar las llamadas *sumas parciales*

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$

Ejemplos

a) Dada $a_n = \dfrac{1}{n}$, se tiene las sumas parciales S_n

$S_1 = 1 \qquad S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} \qquad S_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \quad , \dots , \quad S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

b) Para $b_k = r^k$, con $k = 0, 1, 2, \dots$, las sumas parciales T_n son

$T_0 = 1, \quad T_1 = 1 + r \ , \quad T_2 = 1 + r + r^2 \quad , \quad \dots, \quad T_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$

c) Dada la sucesión $1, -1, 1, -1, \dots$ cuyo término general es $(-1)^{n+1}$, se tiene

$S_1 = 1$, $\quad S_2 = 1^2 + (-1)^3 = 0$, $\quad S_3 = S_2 + (-1)^4 = 1$, $\quad S_4 = S_3 + (-1)^5 = 0$

y, como es fácil ver:

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ impar} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

d) (Puede omitirse en la primera lectura)

Las sumas parciales de la sucesión $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ tienen la expresión general

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Si se quiere visualizar más en detalle las sumas parciales, será

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 - \dfrac{1}{2}$

$T_3 = T_2 + \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$

$T_4 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$

En ocasiones, podría ocurrir que para el término general debamos hacer la distinción, según sea el índice par o impar:

Observando atentamente la evolución de las primeras sumas parciales, ya vemos lo que ocurre:

$$T_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

mientras, para las impares:

$$T_{2n+1} = T_{2n} + \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

La recurrencia.

Observamos que una vez conocida S_2, para calcular S_3 no hace falta sumar los tres valores a_1, a_2, a_3, sino que recurrimos a la cuenta realizada para calcular S_2, ya que $S_3 = S_2 + a_3$. Para calcular S_4 recurrimos a la cuenta hecha con S_3, y le añadimos a_4.(*)

Adviértase que $S_n = S_{n-1} + a_n$, y así sucesivamente. Un hecho trivial que, sin embargo, deseamos destacar, es que $S_n - S_{n-1} = a_n$. El lector debe estar dispuesto a mostrar que esto es realmente así.

Ejemplos.

a) Si es $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$, entonces $S_n - S_{n-1} = r^n$

b) La idea anterior puede extenderse en el siguiente sentido: si nos preguntamos qué es $S_{n+p} - S_n$, puede convenir escribir ambas sumas:

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \end{aligned}$$

Y ahora reflexionamos: sumar hasta $n+p$ es lo mismo que sumar hasta n, tomarse un respiro y luego, partiendo desde $n+1$, seguir hasta $n+p$. Es por ello que si a S_{n+p} le quitamos S_n, es como si sumáramos solamente después del respiro: partimos desde $n+1$ y terminamos en $n+p$.

Así, por ejemplo, $S_{107} - S_{28} = a_{29} + a_{30} + \cdots + a_{107}$.

A la suma de los primeros 107 términos le hemos quitado la suma de los primeros 28, lo que equivale a arrancar desde el término 29.

c) Para $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, se tiene

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Calculando sumas *sin contar uno por uno*

(*) Si usted ha decidido comenzar a hacer un ahorro diario, y a_k es el dinero que introduce el día *k*, entonces la suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es el ahorro acumulado hasta el día *n*.

Todos sabemos que para calcular el total de baldosas de un patio rectangular embaldosado de la manera común, no hace falta contar las baldosas una por una, sino que basta con multiplicar las cantidades de baldosas existentes en dos lados contiguos. Análogamente veremos que algunas sumas muy importantes, pueden ser conocidas ¡sin sumar todos los términos!
Daremos unos ejemplos que corresponden a fórmulas muy populares.

Ejemplos.

a) La suma de los primeros n naturales.

Queremos sumar

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n .$$

Encontraremos una fórmula para esta suma. Veremos que $\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Quizá el lector conozca ya el truco: pongamos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

Miramos esta misma suma pero leyéndola de derecha a izquierda:

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 .$$

Procedemos a sumar, pero antes las acomodamos para que se vea mejor el procedimiento:

$$\begin{array}{lccccccccccccc} S_n = 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ S_n = n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Sumamos ahora, pero por columnas. Visualizamos las columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ n-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ n-2 \end{bmatrix}, \cdots \ , \begin{bmatrix} k+1 \\ n-k \end{bmatrix}, \cdots$$

Al sumar dentro de cada columna , vemos que siempre se tiene el mismo valor: $n+1$. Además tenemos exactamente n columnas. Entonces

$$S_n + S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ sumandos}} = n(n+1)$$

$$2S_n = n(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

De esta forma, si queremos calcular $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$, basta con hacer $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$. Hemos pues calculado la suma de los primeros cien naturales, ¡sin sumarlos uno por uno!.

b) Suma de una progresión geométrica de razón r, con $r \neq 1$.

Queremos calcular la suma

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n \ .$$

Veremos que si $r \neq 1$, entonces

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Pongamos

$$S_n=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}+r^n \qquad \textbf{(A)}$$

Ahora préstese atención al siguiente truco: multiplicamos por r ambos lados de la suma **(A):**

$$rS_n=r.(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}+r^n)$$

$$rS_n=r.1+rr+rr^2+rr^3+\cdots+rr^{n-1}+rr^n)$$

Teniendo presente que si k es un número natural, entonces r^k es el producto de r por sí mismo k veces, se tiene $r^k r=r^{k+1}$, y entonces esto nos da

$$rS_n=r+r^2+r^3+\cdots+r^n+r^{n+1} \qquad \textbf{(B)}$$

Obsérvese que **(A)** y **(B)** tienen en común casi todos sus sumandos: desde r hasta r^n. Si consideramos la diferencia, estos sumandos que viven en ambas expresiones se van a cancelar.

Restamos pues **(B)** de **(A),** desapareciendo casi todo:

$$S_n-rS_n=1-r^{n+1}$$

$$(1-r)S_n=1-r^{n+1}$$

y como el factor de S_n es distinto de cero (siendo $r\neq 1$, es $r-1\neq 0$) , podemos dividir ambos lados de la igualdad para obtener

$$\boxed{1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}} \qquad (r\neq 1)$$

que es lo que se quería probar.

Por ejemplo, para $r=2$ y $n=9$ se tiene $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9=\dfrac{1-2^{10}}{1-2}=1023$

Nota. esta suma es muy importante, y conviene que el estudiante aprenda de memoria dos cosas:

a) El argumento que permite deducir la fórmula.

b) La igualdad hallada.

Aclaremos que esto **no** es una incitación a estudiar de memoria, lo que significaría repetir un argumento sin comprenderlo. Sí en cambio es importante memorizar la estrategia.

Las siguientes sumas, conocidas como telescópicas, serán de importancia

Sumas telescópicas

Una suma se llama telescópica cuando es de alguna de las siguientes formas

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1} - b_k\right)$$

Examinaremos la primera, siendo la segunda enteramente análoga.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) = \left(b_1 - b_2\right) + \left(b_2 - b_3\right) + \left(b_3 - b_4\right) + \cdots + \left(b_{n-1} - b_n\right) + \left(b_n - b_{n+1}\right)$$

Los paréntesis se han colocado solamente para mostrar cómo aparece cada sumando, y quitándolos se hace más evidente que entre primer y segundo grupo mueren juntos $-b_2$ con su opuesto b_2; también se van juntos b_3 con $-b_3$. Aunque no se muestra todo, el $-b_4$ del tercer grupo se cancela con el b_4 del grupo inmediato. Tampoco se "ve", pero se siente, que el b_{n-1} del penúltimo grupo se cancela con su inmediato izquierdo (escondido entre los matorrales de los puntos suspensivos). Por fin, el b_n se cancela con su vecino $-b_n$. Luego de tanta cancelación, solamente quedan dos sobrevivientes: los extremos b_1 y b_{n+1}, que no tienen con quién cancelarse. En definitiva, nos queda

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) = b_1 - b_{n+1}$$

Si tenemos presente cómo queda un telescopio al plegarlo o desplegarlo, se entiende la razón por las que estas sumas se llaman telescópicas.
Para "sentir" esta última forma, más que recurrir a la memoria (que puede traicionarnos) , resulta quizá más sencillo imaginar las sumas y luego sus cancelaciones.

Ejemplos.

a) $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right)$ es una suma telescópica, y mirándola en detalle podremos luego cancelar, comprobando que

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \cdots + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3 = (n+1)^3 - 1$$

O sea:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1$$

b) Probemos que es telescópica (aunque de entrada no se note) , la siguiente suma.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Con una sencilla cuenta comprobamos que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, con lo cual

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así hemos obtenido prácticamente gratis la fórmula de condensación

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}}$$

Luego volveremos sobre esta fórmula.

Observación. Esta triquiñuela consistente en escribir $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, para de esta manera escribir la suma propuesta de manera telescópica, nos produce asombro en un primer contacto; Véase la Práctica para casos similares.

c) Dado que para todo par de reales $x>0$ e $y>0$ vale $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$, se podrá ver sin esfuerzo otra telescópica; observemos antes que en virtud de esta propiedad del logaritmo, se tiene $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln(k)$.

Analizamos ahora $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln(k)]$$
$$=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln(n)=\ln(n+1)$$

En fin:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1).$$

d) (Este ejemplo puede omitirse en una primera lectura)

Estudiaremos la suma $\sum_{k=0}^{n}\left(r^k-r^{k+1}\right)$

Escribiremos esta suma de dos maneras distintas:
Por un lado, la telescopía nos suministra la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n}\left(r^k-r^{k+1}\right)=r^0-r+r-r^2+r^2-r^3+\cdots+r^n-r^{n+1}=1-r^{n+1}$$

Por otro lado, teniendo presente que $r^k-r^{k+1}=r^k(1-r)$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n}\left(r^k-r^{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}r^k(1-r)=(1-r)\sum_{k=0}^{n}r^k$$

Hechas estas dos escrituras de la misma suma, los lados derechos tienen que resultar iguales:

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n}r^k=1-r^{n+1}$$

Si además es $r\neq 1$, obtenemos nuevamente la formula de condensación

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad (r \neq 1).$$

e) (Puede omitirse en una primera lectura)

Encontraremos nuevamente la igualdad $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, pero mediante un artificio de un alcance mayor, ya que nos permitirá luego calcular fórmulas para las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \,,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \text{, etc.}$$

Estudiamos la suma $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right]$, bien telescópica ella:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + \cdots + (n+1)^2 - n^2 = (n+1)^2 - 1 \qquad \textbf{(A)}$$

Por otro lado, la misma suma, aprovechando el hecho de que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, toma el siguiente aspecto:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2S_n + n \qquad \textbf{(B)}$$

donde hemos puesto $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$

Igualando ahora los lados derechos de (A) y (B) se tiene

$$2S_n + n = (n+1)^2 - 1$$

de donde

$$S_n = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$2S_n = (n+1)[n+1-1]$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Observación. Puede pensarse que esta prueba es demasiado complicada comparado con la estrategia expuesta páginas atrás para obtener el mismo resultado. Ninguna es mejor que la otra, y en el ejemplo siguiente puede verse cómo esta misma estrategia nos permite hallar una fórmula para calcular la suma de los cuadrados de los primeros naturales, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

f) (Puede omitirse en una primera lectura)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Llamemos $T_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ y consideremos la suma $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right]$

Como antes lo hiciéramos con $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right]$, ahora calculamos $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right]$ de dos maneras distintas.

Por un lado, la suma es telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]=2^2-1^3+3^3-2^3+\cdots+(n+1)^3-n^3=(n+1)^3-1 \qquad \textbf{(I)}$$

Por otro lado, y conociendo el desarrollo del cubo de una suma, en el paso k se obtiene

$$(k+1)^3-k^3=3k^2.1+3k.1^2+1^3$$

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

Esto lo aplicamos sobre cada sumando de $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]$, obteniendo

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n^{(*)} \qquad \textbf{(II)}$$

Ahora bien, (I) y (II) tienen en común el lado izquierdo, de manera tal que son iguales sus lados derechos:

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2 \;+\; 3\sum_{k=1}^{n}k \;+\; n \;=\; (n+1)^3-1$$

Recordando que T_n es lo que queremos calcular, y que, como ya hemos probado, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, se tiene

$$3T_n+\frac{3}{2}n(n+1)+n=(n+1)^3-1$$

y, luego de despejar un poco:

$$\begin{aligned}3T_n&=(n+1)^3-1-n-3\frac{n(n+1)}{2}\\&=(n+1)^3-(n+1)-(n+1).\frac{3n}{2}\\&=(n+1)[(n+1)^2-1-\frac{3n}{2}]\\&=(n+1)[n^2+2n-\frac{3}{2}n]\\&=(n+1)[n^2+\frac{n}{2}]\\&=(n+1)n(n+\frac{1}{2})\\&=\frac{(n+1)n(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

En fin:

$$3T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

O sea

(*)Recuerde que $\sum_{k=1}^{n}1=n$

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Obtuvimos así la fórmula

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (*)$$

Por ejemplo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \frac{100.101.201}{6},$$

resultado al cual hubiésemos llegado solamente luego de largos padecimientos en caso de sumar cuadrados de los primeros cien números naturales.

Podemos resumir algunas sumas importantes:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (puede hallarse utilizando la misma triquiñuela utilizada en la primera obtención de la fórmula para sumar los primeros n naturales).

(*) Si esto no es belleza / la belleza dónde está.....

Sucesiones sumables (Series)

Ya sabemos sumar una cantidad finita de números; ahora queremos extender la noción de suma a una cantidad infinita de números reales.
Esto sería algo así como poner

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

donde los puntos suspensivos indicarían que sumamos indefinidamente. Pero ello significaría que jamás terminamos de sumar, lo que no parece prometedor. Como veremos a continuación, algo se puede rescatar.
El recurso es considerar las sumas parciales, que hemos visto anteriormente. Pongamos las sumas parciales asociadas:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

A medida que aumenta n, vamos sumando más y más, pero nunca nos detenemos. He aquí que el paso al límite, de existir, puede aligerar nuestra fatiga, como veremos enseguida.

Definición de sucesión sumable

Sea una sucesión a_n y llamemos S_n a la sucesión de sus sumas parciales.
Si existe un número real S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, diremos que la sucesión a_n es sumable, con suma S.
Si el límite mencionado no existe, o bien existe pero es infinito, diremos que la sucesión no es sumable.

Obsérvese entonces que con esta definición de sumabilidad, una sucesión infinita se puede "sumar" cuando, y solamente cuando, sus sumas parciales tienen un límite finito.

Ejemplos de sucesiones sumables

a) Fijado un real r con $|r| < 1$, la sucesión r^n: $1,\ r,\ r^2,\ r^3, \ldots, r^n,\ \ldots$ es sumable. Para verlo formamos las sumas parciales

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + r$,

$S_2 = 1 + r + r^2$

$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$

y queremos averiguar si la sucesión de estas sumas parciales tiene un límite finito.

Como ya lo hemos calculado:

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Analizar entonces la existencia de límite finito para $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ se reduce a analizar la situación sobre $\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.
Siendo

$$\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

y puesto que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^{n+1}}{1-r} = 0$ (recuérdese que hemos decidido considerar solamente el caso $|r| < 1$), se obtiene $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$.

Esto nos dice que la sucesión considerada, cuando $|r| < 1$ es sumable, con suma $\dfrac{1}{1-r}$.

b) La sucesión

$$-1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ \ldots,\ (-1)^n\ ,\ \ldots$$

no es sumable, ya que sus sumas parciales son

$S_1 = -1,\quad S_2 = -1+1 = 0\quad S_3 = S_2 - 1 = -1\quad S_4 = S_3 + 1 = 0$

$$S_n = \begin{cases} -1 & \text{si n es impar} \\ 0 & \text{si n es par} \end{cases}$$

y como la sucesión S_n de sus sumas parciales no tiene límite, concluimos que la sucesión $(-1)^n$ no es sumable.

c) Probaremos que la sucesión $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$
no es sumable. La prueba, muy breve, es por el absurdo.

Imaginemos, por un rato, que dicha sucesión es sumable. Ello significaría que sus sumas parciales S_n forman una sucesión con límite finito, digamos S. Más precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (S \in \mathbb{R})$$

Una suma parcial típica será

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ahora bien, si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, también lo mismo es cierto para la subsucesión de las sumas parciales de índice par: $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, por lo cual, y gracias a que S es un número real, podemos restar sin problemas, y obtener

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0 \quad (*)$$

(*) Obsérvese que en caso de ser $S = +\infty$, hubiésemos tenido una resta con forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$.

Pero poniendo de manera explícita $S_{2n}-S_n$, es fácil ver que se tiene

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

Así:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=0$$

Pero la siguiente acotación será reveladora: la suma

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

de n sumandos(**), es seguramente mayor que n veces el sumando más chico, que es $\frac{1}{2n}$ (el último sumando). Más precisamente

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\ \text{sumandos}}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

Pero ahora obtenemos

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2}$$

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$$

lo que va en contra de $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$.

El absurdo provino de suponer que las sumas parciales tenían límite finito. Por lo tanto, la sucesión de los recíprocos de los naturales no es sumable.

d) Para la sucesión $\frac{1}{1.2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3.4},\ \frac{1}{4.5},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}$

se tiene las sumas parciales $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$. Como vimos al introducir sumas telescópicas, es $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, merced a lo cual

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)=1-\frac{1}{n+1}$$

En fin: $T_n=1-\frac{1}{n+1}$, de donde obtenemos que la sucesión de sumas parciales T_n tiene límite1, lo que nos dice que la sucesión examinada es sumable, con suma 1

Una vez aclarada la noción de sumabilidad de una sucesión, abandonaremos casi definitivamente la palabra sumable (abandonaremos la palabra, no el concepto), y nos subordinaremos a la tradición, que habla de series.

(**) Mirando los denominadores, es fácil ver que hay *n* sumandos.

El lenguaje de las series

Ya hemos comprendido el significado de "sucesión sumable". Conectaremos ahora este concepto con el concepto de serie convergente, que es el mismo, pero con una notación que incluye algunos abusos de notación y lenguaje; hemos querido evitar estos abusos al tomar contacto por primera vez con la idea de sumabilidad.

Partiendo de la sucesión (a_n) de números reales

$$a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\ldots$$

podemos producir una nueva sucesión formada por las llamadas *sumas parciales*

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

y así sucesivamente, quedando definida la suma parcial

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Esta nueva sucesión (S_n) de las sumas parciales se llama *serie* de término general a_k, y es tradicional representarla por medio de alguna de las tres notaciones:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots; \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Cuando no haya lugar a confusión, podremos poner simplemente $\sum a_k$.

Definición. *Cuando la sucesión de sumas parciales* S_n *tiene un límite finito, decimos que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, y a su límite lo llamamos igual que a la serie:* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Si en cambio el límite es infinito, o bien no existe, decimos que la serie es divergente.*

Observación. Nótese los dos sentidos asignados a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Por un lado este símbolo denota a la sucesión S_n de las sumas parciales. Por otro, denota al límite de las sumas parciales, en caso de que este límite exista. Unos ejemplos aclararán este punto.

Ejemplos.

a)

- Cuando hablamos de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$, estamos haciendo referencia a la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$.
- Cuando decimos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ es convergente, estamos diciendo que sus sumas parciales tienen un límite finito (De momento, hemos observado que cuando $|r|<1$, la serie converge)
- Cuando decimos que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \dfrac{1}{1-r}$ $\quad (|r|<1)$, estamos diciendo que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1}{1-r} \quad (|r|<1)$$

- También podemos poner $1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots=\dfrac{1}{1-r}$, bien entendido el significado del lado izquierdo.

b)

- Al hablar de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$, estamos hablando de la sucesión de sumas parciales -1, 0, -1, 0, …
- Podemos decir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ es divergente, porque sabemos que la sucesión de sumas parciales no tiene límite.

c)

- Cuando decimos "la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$" estamos pensando en la sucesión de sumas parciales construidas a partir de la sucesión $\dfrac{1}{n}$.
- Podemos decir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ es divergente, porque sabemos que sus sumas parciales, no tienen un límite finito.

- $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}=+\infty$ significa no solamente la divergencia de la serie, sino que especifica también que para las sumas parciales $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ vale $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\to+\infty$. Esto es sencillo de entender por la siguiente razón: Siendo $S_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{n+1}$, la sucesión S_n es creciente[(*)] , y sabemos que toda sucesión creciente tiene límite, finito o más infinito. Según hemos visto anteriormente, la suposición de límite finito nos llevaba a una contradicción, de donde $\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$.

d)

- $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=1$ significa que, además de la convergencia, tenemos la información exacta sobre su suma, en este caso igual a 1, ya que como vimos, $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}\to 1$.

(*) S_{n+1} se obtiene sumando a S_n un número positivo.

Hemos entendido qué se entiende por convergencia de una serie, y qué por divergencia. También hemos valorado la importancia que puede tener el *armar* las sumas parciales y estudiarlas. Nos interesa ahora desarrollar algunos criterios para detectar cuándo una serie converge o no, sin recurrir al análisis de las sumas parciales. Esto es así porque no todas las series convergentes tienen asociada una fórmula que nos informe de su suma, como hemos visto en el caso de las series geométricas de razón r con $|r|<1$, ni tampoco son tan amables como la telescópica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$.

Es preciso obtener unos *criterios* para detectar el comportamiento de las series, análogamente a lo que ocurre cuando estudiamos las sucesiones.

Digresión. Un hecho sobre el cual invitamos a reflexionar: cambiar un número finito de términos de una sucesión no altera su sumabilidad. (por supuesto que en caso de convergencia, lo que sí se altera es la suma).

El más elemental de todos los criterios, es el llamado *criterio de la condición necesaria*, que pasamos a examinar.

Una condición necesaria para la convergencia de una serie cualquiera

Teorema. *(Condición necesaria de Cauchy)*
Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Por hipótesis, la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ tiene límite finito. Más precisamente, existe un número real S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Como también $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, deducimos que $\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$
Pero como es fácil ver, $S_n - S_{n-1} = a_n$ (¡haga las sumas parciales y reste!), de donde tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplos

a) La serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k$ no es convergente, ya que $\lim_{n\to\infty}(-2)^n$ no existe.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ no converge si $|r|\geq 1$, ya que en este caso no se cumple la condición necesaria $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3k^2+5}$ no converge, ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{k^2}{3k^2+5} = \frac{1}{3} \neq 0$

d) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ no converge, ya que no existe $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} n^2$ no converge, ya que $\lim_{n\to\infty} n^2 \neq 0$

Advertencia. No se debe hacer decir al teorema más de lo que éste dice. El teorema dice que si la serie converge entonces forzosamente su término general ha de tender a cero. Dicho de otra forma: si el término general **no** tiende a cero, entonces la serie **no** puede ser convergente.
En cambio, el hecho de que el término general tienda a cero *nada dice* sobre la convergencia de la serie. Por ejemplo, como lo hemos analizado, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente, sin importar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Por lo tanto, pretender que sea convergente argumentando que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ significa no haber reflexionado acertadamente sobre el significado del teorema. (*)
Este teorema permite afirmar que ciertas series no convergen, pero nunca, jamás, puede ser argumento a favor de la convergencia de una serie.

Series de términos no negativos

Las series de términos no negativos son las más sencillas para estudiar, y su estudio constituirá una base para estudiar series con términos generales con signo variable.

Comenzaremos con un hecho clave, según luego se verá.

Propiedad. *Dada una sucesión de términos no negativos*

$$a_1 \,,\, a_2 \,,\, a_3 \,,\, \ldots,\, a_n \,,\, \ldots \qquad (a_n \geq 0 \quad \forall n \in N)$$

la sucesión S_n *de sus sumas parciales es una sucesión creciente.*

Demostración. Dado que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, en este paso estamos agregando a_{n+1}, que es no negativo. Más precisamente:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \qquad (\text{pues } a_n \geq 0)$$

O sea:

$$S_{n+1} \geq S_n$$

que es lo que se quería demostrar.

Como sabemos, toda sucesión creciente tiene límite: limite *finito* si la sucesión es acotada superiormente, y límite *más infinito* si la sucesión no está acotada superiormente. En vista de esto, la convergencia de una *serie de términos no negativos* es equivalente a la acotación superior de sus sumas parciales. A la luz de esta reflexión, el lector deberá ajustar los detalles del siguiente

---

(*) Errores de este tipo son frecuentes en distintas actividades humanas. Se alude a esta confusión con frases como "confundir el directo con el recíproco" o bien "confundir condición necesaria con suficiente". Si bien es un error común, no se trata de un error menor, y hay en la vida diaria innumerables muestras de sus efectos catastróficos.

Teorema.

Dada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *de términos no negativos, se tiene:*

- $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *está acotada superiormente* $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge*
- $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *no está acotada superiormente* $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *no converge*

Definición. *Si dos series* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *son tales que existe un natural* N *tal que* $a_k \le b_k$ *para todo índice* $k \ge N$, *se dice que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *es mayorante de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *También se dice que la primera está mayorada o dominada por la segunda.*

Ejemplos.

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ mayora a la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, ya que de $0 < \ln k < k$, se obtiene $\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$

b) dadas las series de respectivos términos generales $(-1)^{k+1}$ y $(-1)^k$, ninguna es mayorante de la otra.

Primer criterio de comparación.

(Una serie de términos no negativos dominada por una serie convergente, es convergente).
Sean (a_n) y (c_n) *unas sucesiones de números reales no negativos. Entonces*

Si $0 \le a_n \le c_n \quad \forall n \in N$ y $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge*

Demostración. Pongamos

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

Puesto que $a_1 \le c_1$, $a_2 \le c_2$, $\ldots$, $a_n \le c_n$, se tiene

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

O sea

$$A_n \le C_n$$

Pero como sabemos, la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ significa que sus sumas parciales C_n están acotadas superiormente: existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que $C_n \le C$.

De $A_n \le C_n$, se tiene $A_n \le C_n \le C$, lo que nos dice también que las sumas parciales A_n están acotadas superiormente. Como la sucesión A_n es creciente, su acotación superior nos permite concluir que A_n tiene un límite finito. Pero esto es lo mismo que afirmar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Observación. el criterio sigue valiendo si la desigualdad $0 \le a_n \le c_n$ es válida desde un natural en adelante. La justificación queda a cargo del lector, y no debiera ser soslayada.

Es recomendable que el lector intente hacer un esbozo de la estrategia empleada en esta prueba, algo así como un croquis, en el que solamente escribirá los trazos más gruesos de la demostración. Luego intentará llenar mentalmente los claros dejados. Por fin intentará escribir toda una prueba completa y, si ya no le encuentra errores para remediar, se la dará a la crítica de uno o dos compañeros.

Ejemplos.

a) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es convergente:

Dado que $k^2 > (k-1)k > 0$, se tiene $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} \quad (k \ge 2)$, pero como hemos aprendido anteriormente, la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ es convergente. Por el criterio de comparación es convergente la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Los detalles referidos a que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ y $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ no son una misma cosa deberán ser atendidos por el lector.

b) Prueba de la convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3.2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2} + \cdots$$

Tomemos $k > 2$, y estudiemos $k! = \underbrace{k(k-1)(k-2)\ldots 3.2}_{k-1 \text{ factores}}$

Siendo $k > 2$, todos los factores salvo el último son mayores que 2, de donde se obtiene

$$k! > \underbrace{2.2.2\ldots 2}_{k-1 \text{ factores}} = 2^{k-1}$$

Como es fácil comprobar a partir de esto, vale $k! \ge 2^{k-1}$ para *todo* natural k, quedándonos las desigualdades

$$1! \ge 2^0 \quad 2! \ge 2^1 \quad 3! \ge 2^2 \quad 4! \ge 2^3 \;\ldots\; k! \ge 2^{k-1} \;\ldots$$

tomando recíprocos:

$$\frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^0} \;;\; \frac{1}{2!} \le \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{3!} \le \frac{1}{2^2} \;;\; \ldots \;;\; \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

De este modo, la sucesión $\quad 1 \;,\; \frac{1}{2} \;,\; \frac{1}{3!} \;,\; \ldots \;,\; \frac{1}{k!} \;,\; \ldots$

queda dominada por $\quad \frac{1}{2^0} \;,\; \frac{1}{2} \;,\; \frac{1}{2^2} \;,\; \ldots \;,\; \frac{1}{2^{k-1}} ,\; \ldots$

Ahora bien, estamos en presencia de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, siendo entonces una serie convergente de términos no negativos. El criterio de comparación hace el resto. Todos los detalles a cargo del lector.

Advertencia. Una aplicación desaprensiva del criterio de comparación puede traer resultados catastróficos. *El siguiente procedimiento es equivocado*, como deberá descifrar el lector.

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ donde $a_k = -1\ \forall k \in \mathbb{N}$. Observamos que su término general no satisface la condición necesaria $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, de donde se sigue que la serie *no puede* ser convergente .

Por otra parte, si consideramos la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ de término general $c_k = 0$, se cumple entonces $a_n < c_n$ $(-1 < 0)$ para todo índice, y además $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ es claramente convergente. En consecuencia según el teorema de mayoración la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ debe ser convergente. Encuentre el lector el defecto.

Segundo criterio de comparación.

(Una serie de términos no negativos que domina a una serie divergente, es divergente)

Sean (a_n) y (d_n) *unas sucesiones de números no negativos.*

Si $a_n \geq d_n \geq 0 \quad \forall n \in N$ y $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *diverge entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge*

Demostración 1.

Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $D_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

Que $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ diverge significa que la sucesión de las sumas parciales D_n no está acotada superiormente. (Esto es por el crecimiento de la sucesión de sumas parciales)

Como hiciéramos en la demostración del primer criterio, de la relación

$$a_n \geq d_n \quad \forall n \in N$$

deducimos

$$A_n \geq D_n$$

y como D_n no está acotada superiormente, entonces por ser $A_n \geq D_n$, no puede estar A_n acotada superiormente. Pero esta última condición, en el ambiente de las sucesiones de términos no negativos, es equivalente a la divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **.**

Demostración 2.

La prueba se hace por el absurdo, teniendo en cuenta que el ambiente de las series de términos no negativos, solamente caben dos posibilidades: o bien la serie converge o bien tiende a más infinito. Si fuese $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente, como esta serie es mayorante de la serie de términos no negativos $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$, esta última serie debería ser convergente, en virtud del primer criterio de comparación. Pero esto va contra la hipótesis, donde se asume que $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ es divergente. Nos queda una única posibilidad, y es la divergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Ejemplos.

a) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ es divergente. Basta con comparar sus términos con los de la serie (armónica) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergente: se cumple $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$; ahora el segundo criterio de comparación hace el resto.

b) Estudiamos la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$. Sabemos que $\ln x < x \ (x > 0)$. Además, para $k \geq 2$ es $\ln k > 0$, y así se tiene $\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$.

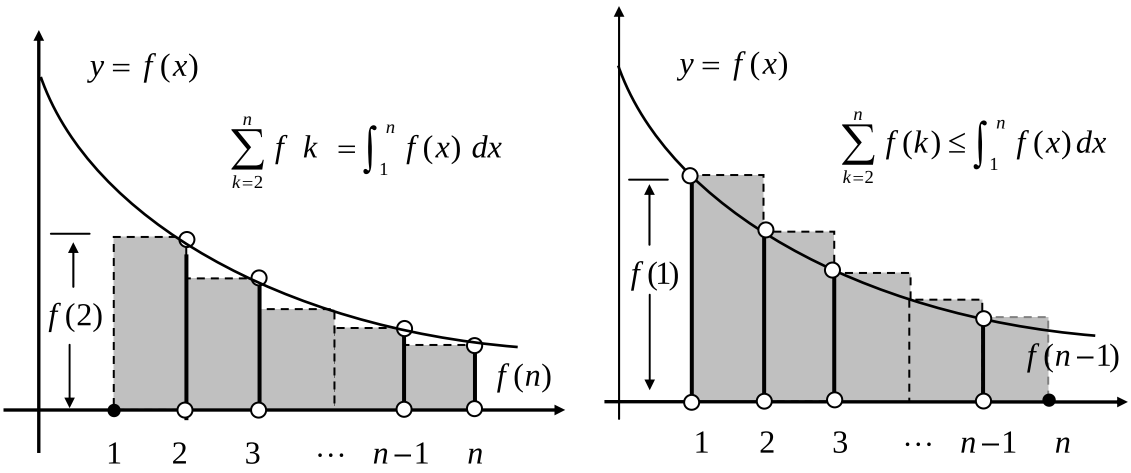
El término general $\frac{1}{\ln k}$ mayora al término general $\frac{1}{k}$, cuya serie asociada es divergente. Por el teorema de comparación, la serie examinada es divergente.

El siguiente criterio nos permitirá ampliar notablemente nuestro conocimiento sobre el comportamiento de numerosas series

El criterio integral de Cauchy.

Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *una función no negativa y decreciente (por lo tanto integrable Riemann sobre cada intervalo* $[1, b] \subseteq [1, +\infty)$*)*

Consideremos ahora las sucesiones $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ *y* $T_n = \int_1^n f(x)\, dx$. *Entonces ambas tienen el mismo comportamiento: o ambas convergen o ambas divergen.*



Prueba visual del criterio de la integral

Demostración. Comparando áreas, las figuras resultan elocuentes, y se tiene el par de desigualdades

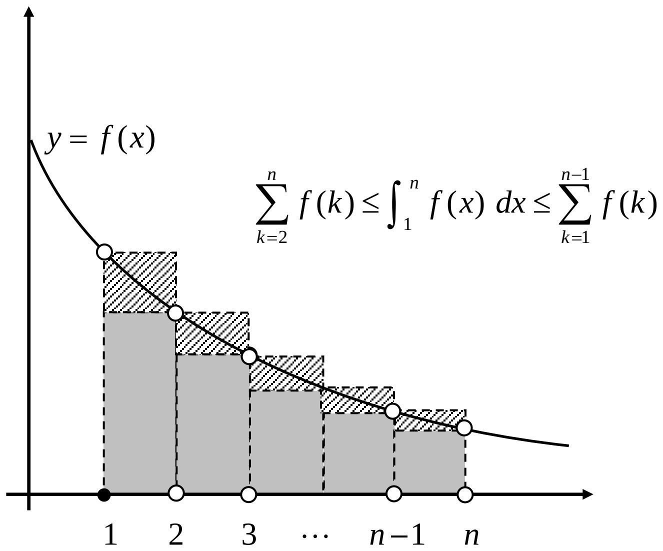
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{1}^{n-1} f(k)$$

o bien

$$S_n - f(1) \le T_n \le S_{n-1}$$

Si T_n está acotada superiormente, la desigualdad izquierda revela que $S_n - f(1)$ está acotada superiormente, y por lo tanto también lo estará S_n. Si en cambio T_n no estuviese acotada superiormente, entonces la desigualdad derecha revela que tampoco puede estarlo S_n . Así, o bien ambas sucesiones están acotadas superiormente, o bien ambas no lo están. Siendo ambas sucesiones crecientes, esto equivale a que o bien ambas tienen límite finito, o bien ambas tienen límite más infinito.

Puede también visualizarse ambas desigualdades en un solo gráfico, tomando en consideración que el área bajo la curva entre 1 y n está comprendida entre el área determinada por los rectángulos grises, y el área determinada por los rectángulos mixtos.



Las series p

Se llaman series p a las de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, donde p es un número real fijo.

Estudiaremos su comportamiento según los valores que tome p.

Cuando es $p=1$ se tiene la serie llamada armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la que ya sabemos divergente.

Cuando es $p \leq 0$, resulta que $\frac{1}{n^p}$ no tiende a cero, con lo cual para estos valores de p la serie es divergente.

Utilizaremos ahora el criterio integral de Cauchy. Para ello consideremos la función no negativa $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x)=\frac{1}{x^p}$ $(p>0)$. Una inspección sobre su derivada nos muestra que es una función decreciente, y por lo tanto integrable Riemann sobre cada intervalo cerrado $[1,b]$ contenido en $[1,+\infty)$. Además, como debía ser, se cumple $f(k)=\frac{1}{k^p}$.

Según el criterio integral de Cauchy, las sucesiones $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ y $\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$ tienen ambas el mismo comportamiento. Estudiemos pues $\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$. Según el valor de p tendremos:

$\boxed{p=1}$ Estaremos volviendo a estudiar la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y al estudiar la integral asociada tenemos $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$

Ahora pasamos al límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$

De donde la serie armónica resulta divergente, lo que ya habíamos averiguado por otros medios.

$\boxed{p \neq 1}$ $$\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^n x^{-p}\,dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p}(n^{1-p}-1)$$

Observamos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1-p} = \begin{cases} +\infty & \text{si } p<1 \\ 0 & \text{si } p>1 \end{cases}$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p} \lim_{n\to\infty} (n^{1-p}-1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0<p<1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p>1 \end{cases}$$

Hemos obtenido todo lo que necesitamos para conocer el comportamiento de las series p.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge si } p \leq 1 \text{ y converge si } p>1}$$

Este resultado debe ser aprendido de memoria, ya que las series p se utilizan muy frecuentemente como series contra las cuales comparar otras series, para así obtener información sobre el comportamiento de estas últimas.

Obsérvese que el comportamiento de las p series con $p=\frac{1}{2}$, $p=1$ y $p=2$ fue averiguado "a mano" anteriormente, lo que no debiera ser desechado con el argumento de que el criterio de Cauchy nos caracteriza las series p de un solo golpe.

Un ejercicio más que saludable será hacer la consideración geométrica que lleva al criterio de Cauchy, *de manera totalmente artesanal*, para probar la convergencia de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ y luego la divergencia de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. O sea, sugerimos que para el primer caso esboce el gráfico de $\frac{1}{x^2}$ para x entre 1 y n, dibuje los rectangulitos correspondientes, compare áreas, y finalmente obtenga razonadamente su conclusión. Algo análogo para el otro caso. Hágalo: no va a haber perdido el tiempo.

Propiedades de homogeneidad y aditividad

a) *(homogeneidad) Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente, entonces para cada real fijo* λ, $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k)$ *es convergente, y además vale la igualdad* $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

b) *(aditividad) Sean dos series convergentes* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Entonces la serie "suma" $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ *es convergente, y vale la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Demostración de a).

Pongamos

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \quad con \;\; S_n\to S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$T_n=\lambda a_1+\lambda a_2+\lambda a_3+\cdots+\lambda a_n$$

Vemos que

$$T_n=\lambda(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=\lambda S_n$$

Por lo cual existe

$$\lim_{n\to\infty} T_n=\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n)=\lambda\lim_{n\to\infty} S_n=\lambda S$$

Esto prueba a la vez la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda a_k$ y la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}a_k \ .$$

Hemos probado a).

En particular para $\lambda=-1$, y dado que $(-1)t=-t$, se tiene que la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$, con la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)=-\sum_{k=1}^{\infty}a_k \ ^{(*)}$$

Corolario 1. *Si para algún real $\mu\neq 0$ es $\sum_{k=1}^{\infty}(\mu a_k)$ convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ es convergente.* Para verlo, basta multiplicar por μ^{-1}.

Advertencia El que sea $\mu\neq 0$ es fundamental, como lo prueba el hecho de que de la innegable convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(0.n)$, no se puede inferir la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}n$.

Corolario 2. *Para cada real $\mu\neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}(\mu a_k)$ es divergente si y solamente si $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ es divergente.*

Demostración de b)

Pongamos

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \quad \text{con } S_n\to S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

$$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n \quad \text{con } T_n\to T=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

$$U_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$$

La conmutatividad y la asociatividad de la suma de los números reales hacen posible escribir

$$U_n=S_n+T_n$$

de donde vemos que existe

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=S+T \quad (@)$$

Con esto probamos que la suma de dos sucesiones sumables, también es sumable.

Solamente nos falta ver que $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ es igual a la suma de ambas series.

Pero esto es inmediato: por definición es $\lim_{n\to\infty}U_n=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ y mirando en (@) se obtiene

(*) Naturalmente, esta propiedad puede ser fácilmente demostrada a mano.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

Como sencilla aplicación de las propiedades de homogeneidad y aditividad, surge la siguiente proposición que el lector demostrará:

Proposición.

a) *Dadas dos series convergentes* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ *y dos reales cualesquiera* λ,μ, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k+\mu b_k)$ *es convergente, y*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k+\mu b_k)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}a_k \quad + \quad \mu\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

b) *Si* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *es convergente y* $\sum_{k=1}^{\infty}d_k$ *es divergente, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ *es divergente.*

Ejemplos.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(3^{-n}+n^{-1})$ diverge, ya que si fuera convergente, entonces, al ser convergente la serie de término general 3^{-n}, también sería convergente la serie de término general $n^{-1}=(3^{-n}+n^{-1})-3^{-n}$, lo cual es conocidamente falso.

b) El lector debe buscar (y encontrar) por su cuenta al menos dos ejemplos más.

Series alternadas

Ampliaremos nuestro conocimiento sobre las sucesiones sumables. Ya no tendremos la restricción de tener sus términos no negativos, pero por el momento la libertad no será total: estudiaremos el problema de la sumabilidad para unas sucesiones que cambian alternadamente su signo.

Una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos, como

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots \quad \text{con } a_n\ge 0 \ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

se llama *serie alternada*.

También se llama serie alternada si presenta el aspecto

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^{n}a_n+\cdots \quad \text{con } a_n\ge 0 \ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Observación. El término general del primer ejemplo es, hablando estrictamente, $(-1)^{n+1}a_n$ y no a_n. No obstante, un frecuente abuso de lenguaje lleva a que, en el ambiente de las series alternadas, se hable de la serie alternada de término general a_n

Ejemplos

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

b) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{\ln k}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\cdots$

El siguiente teorema fue descubierto por Leibniz.

Teorema. (*criterio de Leibniz*) *Una condición **suficiente** para que una serie alternada sea convergente es que su término general a_n tienda decrecientemente a cero.*
Más precisamente:
Dada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *con* $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, *una condición suficiente para que* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *sea convergente es que se cumplan las condiciones*
a) a_n *es decreciente*
b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración. Probar que la serie converge es, desde luego, probar que la sucesión de sus sumas parciales tiene límite finito.
Tenemos una sucesión decreciente:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

Pongamos

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n .$$

Estudiaremos a continuación el comportamiento de las especiales sumas parciales S_{2n} y S_{2n+1}
Las sumas parciales de índice par son
$S_2 = a_1 - a_2$
$S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$
$S_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$
$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$
Observar que el decrecimiento de la sucesión a_n garantiza

$$a_1 - a_2 \geq 0,\ a_3 - a_4 \geq 0,\ a_5 - a_6 \geq 0,\ a_7 - a_8 \geq 0,\ \text{etc.},$$

lo que nos muestra que cada una de estas sumas parciales se obtiene de la anterior agregándole un número no negativo. O sea que la subsucesión formada por las sumas parciales de índice par es creciente. Más formalmente:
El crecimiento de a_n nos asegura que $a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$. Por otra parte, es

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n})$$

$$S_{2n+2} \geq S_{2n}$$

Miramos ahora la sucesión S_{2n}, pero agrupando de manera distinta:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Obsérvese que a a_1 le estamos quitando todos elementos no negativos: los entre paréntesis por ser a_n decreciente, y a_{2n} porque la sucesión es no negativa por hipótesis.

Por estas razones, tenemos la acotación

$$S_{2n} \leq a_1 .$$

Tenemos así que la sucesión S_{2n} es creciente y acotada superiormente (a_1 es una cota superior) . Un conocido teorema nos garantiza entonces que esta sucesión tiene un límite finito, digamos S .

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Por otra parte la sucesión de las sumas parciales impares verifica

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

Como ambos sumandos del lado derecho tienen cada uno límite, S y 0 respectivamente, el lado izquierdo tiene límite. Más precisamente

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$$

Tenemos ahora $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$

Afirmamos que entonces la sucesión entera de las sumas parciales es convergente, que es lo que se quería demostrar.

Los detalles quedan a cargo del lector, a quien ofrecemos un esbozo de la demostración: tomando un entorno cualquiera de S , por ser $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, los S_{2n} están metidos en ese entorno para valores suficientemente avanzados de n . Análogamente, y por ser $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, ese mismo entorno contiene los S_{2n+1} para valores suficientemente avanzados de n . De acá concluimos que si n es suficientemente grande, tanto S_{2n} como S_{2n+1} están en dicho entorno. Esto prueba que $S_n \to S$.

Ejemplos. Estudiar la convergencia para **a)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

a) Siendo la función logaritmo una función creciente y positiva en $(1,+\infty)$, $\ln n$ es una sucesión creciente y positiva para $n \geq 2$, y así $\dfrac{1}{\ln n}$ es decreciente y positiva.

Por otro lado, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, se tiene $\dfrac{1}{\ln n} \to 0$

Se cumple entonces las condiciones del teorema de Leibniz para series alternadas:

a) $\dfrac{1}{\ln n}$ es decreciente y positiva

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$

En consecuencia $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{\ln n} + \cdots$ converge

b) Vemos que esta serie está en las condiciones del teorema de Leibniz para series alternadas: $\dfrac{1}{n}$ cumple

a) $\frac{1}{n}$ es decreciente

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

En virtud del teorema de Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ es convergente.

Ejercicio propuesto. Con esta última serie, reproducir enteramente la demostración del teorema de Leibniz. Apuntar las estrategias, hacer un esbozo y luego ir completando los detalles. Una vez hecho, intentar contárselo a algún compañero.

Convergencia absoluta

Sea ahora una sucesión a_n de números reales, de cualquier signo, y consideremos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

(recuerde que esto simboliza a la sucesión $\sum_{k=1}^{n} a_k$ de las sumas parciales)

Definición. *(Convergencia absoluta)* Diremos que la serie *converge absolutamente* si converge la serie de los valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

Ejemplo. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ es absolutamente convergente, porque la serie de los módulos es $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, bien convergente.

Ejemplos triviales de series absolutamente convergentes son las series convergentes de términos no negativos, porque en este caso $|a_n| = a_n$

Definición. *(Convergencia condicional)* Una serie convergente pero no absolutamente convergente se llama *condicionalmente* convergente.

Ejemplos.

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ converge pero $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ no converge

b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln k}$ converge pero $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$ no converge.

Convergencia absoluta implica convergencia

Teorema. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ la serie absolutamente convergente. Por definición, esto significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente.
Observemos ahora las siguientes desigualdades $0 \le x + |x| \le 2|x|$.
Esto es así porque, cuando x es positivo o nulo, todo se hace trivial al ser $|x| = x$.
Cuando en cambio x es negativo, $|x| > 0$ y siendo $|x| = -x$ se tiene
$0 = x + (-x) < 2|x|$.
Gracias a estas desigualdades, tenemos

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

Pero esto significa que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right)$ es una serie de términos no negativos, mayorada además por la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$.
En virtud de un teorema de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right)$ es convergente.
Ahora bien, como ya lo hemos discutido, la diferencia entre dos series convergentes es también una serie convergente, con lo que resulta convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

Pero esto no es otra cosa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo. Veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{sen(n)}{n^2}$ es absolutamente convergente

Ni soñar con una alternada, ya que la sucesión $\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ tiene un comportamiento más que irregular. Por fortuna, al considerar la serie de lo módulos se tiene

$$\left|(-1)^n \frac{sen(n)}{n^2}\right| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} .$$

Se tiene así que la serie de los módulos está mayorada por la serie de término general $\frac{1}{n^2}$, bien convergente. El correspondiente teorema de mayoración nos garantiza la convergencia de la serie de los módulos, y, en virtud del último teorema, la convergencia de la serie original.

Criterios de convergencia absoluta

Supóngase una serie cualquiera $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ya no de términos no negativos. Los criterios aplicados a las series de términos no negativos se aplican, claro está, a las series de la forma $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$. Consecuentemente, si por algún medio detectamos la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, el teorema anterior nos garantiza la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$.

Obsérvese en cambio que la divergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ *no obliga* a la divergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, y de esto son testigos todas las series condicionalmente convergentes.

Criterios del cociente *(criterios de la razón, o criterios de d'Alembert)*

Por una conveniencia notacional que se apreciará luego, supondremos que la sucesión comienza con el índice cero. (esto es solamente a los fines demostrativos).
Tomamos una sucesión de términos no nulos $(a_n)_{n\geq 0}$ y formamos el llamado *cociente* de d'Alembert $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Con esto en mente, veamos el siguiente:

Criterio de d'Alembert (primera forma)

a) *Si existe un real λ y un natural N tal que para $n \geq N$ se cumple*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \lambda < 1,$$

entonces la serie de término general a_n converge absolutamente.

b) *Si existe un natural N tal que para $n \geq N$ se cumple*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1,$$

entonces la serie diverge [1]

Observación. En cuanto a la condición **a)**, no debe creerse que ésta pueda reemplazarse por la condición más débil $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$**,** como lo muestra la serie armónica, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ya que en este caso $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1} < 1$ y no obstante la serie no converge.

Demostración.

a) Es suficiente analizar el caso $N = 0$, ya que la supresión de un número finito de términos no altera la convergencia de una serie. Por hipótesis tenemos

$$\frac{|a_1|}{|a_0|} \leq \lambda \quad ; \quad \frac{|a_2|}{|a_1|} \leq \lambda \quad ; \quad \frac{|a_3|}{|a_2|} \leq \lambda \quad ;.\ .\ .\ ; \quad \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \lambda$$

1 diverge de la peor manera: el término general no tiende a cero.

Siendo todos los lados izquierdos positivos, podemos multiplicar los n factores preservando la desigualdad:

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right| \cdot \left|\frac{a_3}{a_2}\right| \cdot \cdots \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \lambda^n$$

$$\left|\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \lambda^n$$

Y luego de una limpieza:

$$\frac{|a_n|}{|a_0|} < \lambda^n$$

$$|a_n| < |a_0| \lambda^n$$

Dado que es $0 < \lambda < 1$, la serie geométrica de término general $|a_0| \cdot \lambda^n$ converge, y la relación $|a_n| < |a_0| \lambda^n$ nos muestra que esta geométrica domina a la serie de términos positivos de término general $|a_n|$, la que resulta convergente por el criterio de comparación.

c) De $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ surge $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, de donde la sucesión de término general $|a_n|$, al ser creciente, no puede tender a cero. Luego tampoco puede tender a cero a_n , con lo que la serie original no es convergente al no cumplirse la condición necesaria (Cauchy).

Este criterio es muy utilizado en una versión que involucra un límite, y se formula como sigue:

Criterio de d'Alembert (segunda forma) *Si existe el límite del cociente de d'Alembert*

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad (0 \leq L \leq +\infty)$$

Entonces:

a) $0 \leq L < 1$ *implica que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

b) $L > 1$ *implica que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge*

(diverge de la peor manera, pues a_n *no tiende a cero).*

c) $L = 1$ *El criterio no suministra información.*

Demostración.

a) Si es $0 \leq L < 1$, tomemos cualquier real λ con $L < \lambda < 1$. Siendo $\lambda > L$, de

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

y la definición de límite (*) deducimos que existe un natural N tal que para todo $n \geq N$ se verifica

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda < 1$$

Estamos entonces en condiciones de la primera versión del criterio de d'Alembert, de donde se deduce lo deseado.

b) Como es $L > 1$, tomamos ahora cualquier real λ que cumpla $1 < \lambda < L$. Siendo $\lambda < L$, nuevamente por la definición de límite podemos encontrar un natural N tal que para todo $n \geq N$ se cumple $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \lambda > 1$

Como es $\lambda > 1$, podemos aplicar lo razonado en la primera versión del criterio de d'Alembert, y **b** queda probado cuando el límite es finito. En caso de tener límite *más* infinito, el lector deberá probarlo por sus medios.

c) Considerando el cociente de d'Alembert para las series de término general $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$, es fácil ver que en ambos casos el límite existe y es igual a 1. Pero la primera serie diverge y la segunda converge.

Observación. En caso de encontrarnos frente a este caso de indecisión, debemos investigar la serie por otros medios. Que el criterio no permita decidir no significa que nosotros no podamos examinar la serie. Solamente que deberemos hacerlo con otros recursos.

Ejemplos. Mediante los criterios de d'Alembert estudiar cada serie

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

Armamos el cociente de d'Alembert $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^n}\right|$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

(*) Si tiene dificultad para comprender esta argumentación, y luego de un intento personal no ha podido resolverlo, puede dirigirse a la prueba siguiente, el criterio de Cauchy en su segunda versión, donde se da un argumento más detallado.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Estamos en el caso $0 \le \lambda < 1$ del criterio de d'Alembert, lo que nos garantiza la convergencia absoluta de la serie.(**)

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{7n-1}n^n}{n!}$

El cociente de d'Alembert es ahora $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{7n+6}\left(n+1\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^{7n-1}n^n}\right|$

$$= \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{(n+1)n!n^n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Dado que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e > 1$, el criterio de d'Alembert en su segunda forma nos permite asegura que la serie examinada es divergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$

El cociente de d'Alembert es

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e^n e(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{e^n n!}$$

$$= e\frac{n^n}{\left(n+1\right)^n} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

En fin:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende crecientemente al número e, con lo cual

---

(**) Compárese este resultado con el trabajo realizado en páginas anteriores al estudiar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1$$

El criterio de d'Alembert en su segunda forma nos dice: **N*o hay información*.** Pero no todo está perdido. Siendo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, se tiene

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

De acá deducimos que $|a_{n+1}| > |a_n|$, o sea que la sucesión de números positivos $|a_n|$ es creciente, con lo cual no puede tender a cero. Consecuentemente tampoco puede tender a cero la sucesión a_n, con lo que la serie no converge.

Observación. En realidad pudimos "aplicar" el criterio de d'Alembert en su primera versión (sin límite) , pero de manera intencional hemos querido llevar de paseo al lector, para ayudarlo a evitar la popular enfermedad que padecen los "aplicadores de criterios". De hecho, hemos reproducido el argumento utilizado al razonar aquel criterio.

Criterios de la raíz enésima.

Criterio de la raíz enésima, primera versión.

Dada una sucesión $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ *de números reales*

a) *Si para todo* $n \geq N$ *es* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda < 1$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente*

b) *Si para infinitos valores de* n $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge.*

Demostración.

a) $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda$ es lo mismo que $|a_n| \leq \lambda^n$. Esto nos dice que la serie $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ está mayorada por la serie geométrica $\sum_{k=N}^{\infty} \lambda^k$, que es convergente al ser $0 \leq \lambda < 1$. En virtud del criterio de comparación, $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ converge, lo que prueba la convergencia absoluta de $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, y por ende la de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

b) Si para infinitos valores de n es $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, también para esos infinitos valores será $|a_n| \geq 1$, con lo cual la sucesión a_n no puede tender a cero, condición necesaria para la convergencia de cualquier clase de serie.

La siguiente es una versión del criterio de la raíz que involucra un límite.

Criterio de la raíz enésima de Cauchy, segunda versión.

En las mismas condiciones que anteriormente, supóngase que existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \qquad (0 \leq L \leq +\infty)$$

Entonces

a) $0 \leq L < 1$ implica $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

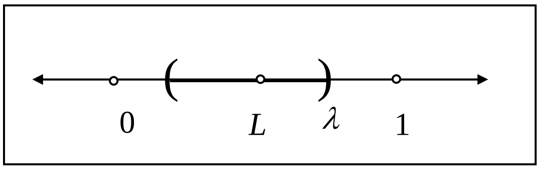
b) $L > 1$ (incluido $L = +\infty$) implica $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge

c) Si $L = 1$ el criterio no suministra información

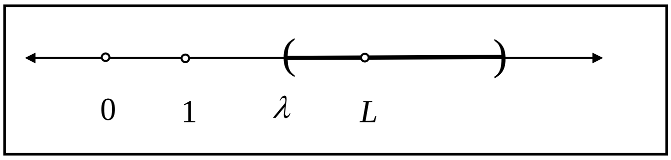
Demostración.

a) Comenzaremos con el caso $0 < L < 1$.
Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$ .En virtud de la definición de límite, para valores suficientemente avanzados de *n*, se cumplirá $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda < 1$

Aplicamos entonces la versión original de criterio de la raíz enésima, recientemente demostrado.
Si le queda alguna duda: en el intervalo (zona negra) de la figura debe caer $\sqrt[n]{|a_n|}$ para casi todo valor de *n*.
El caso $L = 0$ no es demasiado distinto, y el lector le dedicará su atención.



b) Sea ahora λ un número tal que $1 < \lambda < L$. En virtud de la definición de límite, existe un N tal que si $n \geq N$, entonces $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \lambda > 1$. Ahora razonamos como en la primera versión del criterio de la raíz enésima, y termina la prueba de **b)** para el caso de límite finito. El caso de límite más infinito queda a cargo del lector.



c) Los mismos ejemplos que los del criterio de la razón de d'Alembert son útiles acá, habida cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

Ejemplos.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$

Si es $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{3^n}$, entonces será $|a_n| = \left|\dfrac{(-1)^n n}{3^n}\right| = \dfrac{n}{3^n}$ con lo que $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{n}{3^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Siendo $\dfrac{1}{3} < 1$, el criterio de la raíz enésima nos garantiza la convergencia absoluta de la serie estudiada.

b) Sean $0 < s < t < 1$ y definimos $a_n = \begin{cases} s^n & \text{si} \quad \text{n impar} \\ t^n & \text{si} \quad \text{n par} \end{cases}$

Estudiar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} s & \text{si} \quad \text{n impar} \\ t & \text{si} \quad \text{n par} \end{cases}$$

En consecuencia, no existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Sin embargo, como para todo n es

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq t < 1 ,$$

el criterio de la raíz enésima en su versión sin límite, nos garantiza que la serie examinada converge.

Nociones elementales sobre las series de potencias

Llamamos serie de potencias a cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Los a_k se llaman los coeficientes de la serie de potencias. Más generalmente, si *a* es un número fijo, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

se llama "serie de potencias en $x-a$". Cuando es $a=0$, se tiene la primera serie, llamada por lo mismo "serie de potencias en x"
Haciendo el cambio de variable $t = x-a$, esta segunda serie toma el aspecto

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots,$$

enteramente idéntico a la primera serie. Por esta razón, el estudio de las series con este último aspecto permite conocer lo esencial.

Ejemplos

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-2)^k = 1 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 \cdots + \frac{1}{n!}(x-2)^n + \cdots$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-2)^k = -(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{3}(x-2)^3 \cdots + \frac{(-1)^n}{n}(x-2)^n + \cdots$

El intervalo de convergencia

Interesa conocer para qué valores de la variable x es convergente una serie de potencias. Si hacemos $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, nos podemos preguntar cuál es el dominio natural[2] de esta función. Este dominio, obviamente, coincide con el conjunto de todos los x para los cuales la serie es convergente. En este particular caso, el dominio natural es el intervalo $(-1,1)$

En una serie de potencias

$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$, el dominio natural es o bien $\{a\}$, $\mathbb{R}$, o bien intervalos de alguna de las formas $[a-\delta, a+\delta]$,

[2] Por dominio natural de una función entendemos el más grande conjunto donde ella está bien definida.

$[a-\delta, a+\delta)$, $(a-\delta, a+\delta]$, $(a-\delta, a+\delta)$ donde δ es un número que depende solamente de los coeficientes de la serie. Obsérvese que, excepción hecha de los bordes, todos estos intervalos son simétricos alrededor de *a*.
Si aceptamos, como es común, llamar "intervalo" a $(-\infty, +\infty)$ y también a un conjunto unitario $\{a\}$ (intervalo degenerado en un punto, o simplemente intervalo degenerado), entonces todos los conjuntos aludidos son intervalos. Para cada serie hay asociado uno de estos intervalos, llamado *intervalo de convergencia*.

La demostración de este hecho está fuera del alcance de este curso. Nos concentraremos en el problema de estudiar el intervalo de convergencia.

Problemas.

a) Hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, estudiando dónde la convergencia es absoluta, y de haberla, dónde es condicional. A medida que se va progresando en el análisis, representar en la recta las regiones halladas. Dar un gráfico final que ilustre las regiones de convergencia absoluta, de convergencia condicional si la hay, y de divergencia si la hay.

Hacemos $a_n = \frac{x^n}{n}$, $\quad |a_n| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n}$

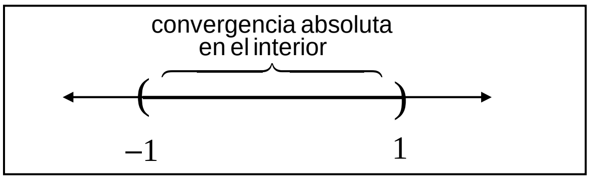
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}}$$

Sabemos que para aquellos valores de x para los que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, la serie será convergente, mientras para aquellos valores que hagan $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, la serie será divergente.
Cuando sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, tendremos que estudiar la serie resultante con otros recursos.
Como es sabido , $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, luego

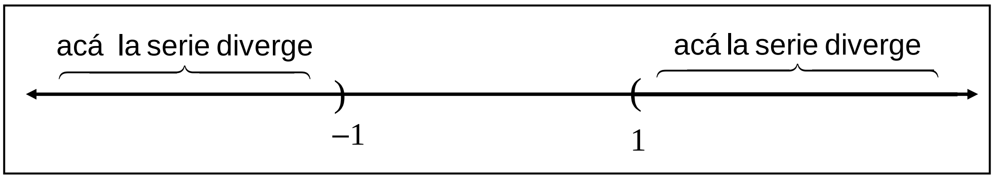
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|}$$

Estudiamos ahora los valores de $|x|$

a) para $|x| < 1$, la serie converge absolutamente: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.



b) cuando $|x| > 1$, la serie es divergente: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$



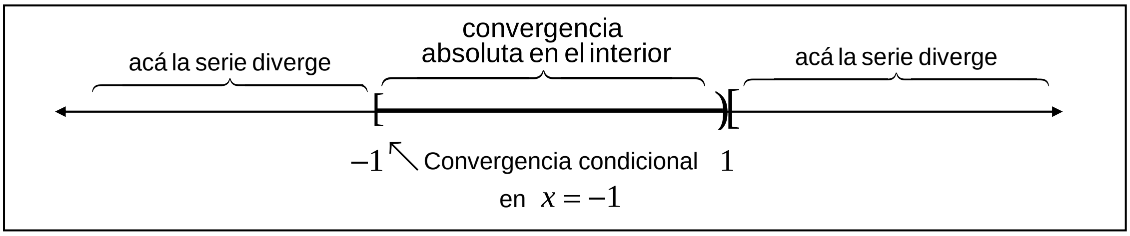
Ya vamos formándonos una idea. Sabemos que hay convergencia absoluta en el intervalo abierto $(-1,1)$. Sabemos también que la serie diverge en las semirrectas $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$.Solamente nos queda por examinar los puntos que producen indecisión al aplicar el criterio de la raíz enésima de $|a_n|$. Los tenemos que estudiar a mano, y es el caso

c) $|x|=1$

Estudiamos ahora las series correspondientes a los valores que hacen $|x|=1$

- Para $x=1$ tenemos la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, la conocida serie armónica, que diverge
- Para $x=-1$ producimos la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{kl}}{k}$, conocida serie alternada convergente, lo que se garantiza aplicando el criterio de Leibniz para series alternadas. Como es fácil ver, esta serie es condicionalmente convergente.

En fin, el intervalo de convergencia ha resultado ser $[-1,1)$, resaltando que la convergencia es absoluta en su interior y condicional en -1.



b) Hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(x-3)^k$

Poniendo $a_n=\frac{(-1)^n}{n!}(x-3)^n$, será $|a_n|=\frac{1}{n!}|x-3|^n$

Pero antes de hacer el cociente de d'Alembert, debemos observar que este no está definido para $x=3$. Por otra parte, como es fácil ver, en $x=3$ la serie es convergente.

Hecha esta observación, ponemos entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ con la salvedad de que es $x\neq 3$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1|x-3|^n\,|x-3|\,n!}{(n+1)n!|x-3|^n}=\frac{|x-3|}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{n+1}=0<1$$

Como este límite no depende del tamaño de x, el criterio de d'Alembert nos permite asegurar que la serie converge en toda la recta real, siendo esta convergencia absoluta.

c) Estudiar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{(n+1)3^n}$

Poniendo $a_n = \frac{n(x-2)^n}{(n+1)3^n}$, observamos que la serie converge para $x = 2$. El cociente de d'Alembert está bien definido solamente para $x \neq 2$, en cuyo caso se tiene

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)|x-2|^n\,|x-2|(n+1)3^n}{(n+2)3^n 3n|x-2|^n}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} \cdot \frac{1}{3} \cdot |x-2|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-2|}{3}$$

Aplicando el criterio de d'Alembert, la serie converge absolutamente para los x tales que $|x-2| < 3$, o sea para $x \in (-1,5)$.

También diverge cuando $|x-2| > 3$, o sea en las semirrectas $(-\infty,-1)$ y $(5,+\infty)$.

El criterio falla cuando es $|x-2| = 3$, o sea en $x = -1$ y en $x = 5$.

Cuando $x = -1$, tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n+1}$, divergente porque el término general no tiende a cero.

Para $x = 5$, la serie resulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, nuevamente divergente por la misma razón. En fin, la serie converge absolutamente en el intervalo $(-1,5)$, y diverge fuera.

Observación. El lector inquieto debiera comprobar que mucho más expeditivo hubiera sido emplear el criterio de la raíz enésima del módulo de la sucesión examinada. ¿Lo hará?

http://www.rinconmatematico.com.ar/bunge/series/serieshtm/series.htm
http://www.rinconmatematico.com.ar/bunge/series/seriespdf/series.pdf
Mario Augusto Bunge http://www.rinconmatematico.com