El intervalo [0,1] no es numerable

Georg Cantor enunció y demostró que los números reales no pueden ser numerados, y dio en su momento la demostración conocida luego como el método diagonal de Cantor o quizá, al decir de Cantor, “el método diagonal mío”.

Una prueba distinta y muy bonita puede encontrarse en “La matemática: su contenido, métodos y significado” [1]. La demostración, cuyas líneas principales se ven más abajo, me produce una inquietud menor, y es que no encuentro la necesidad de la condición de que los diámetros de los intervalos allí considerados tienda a cero.

Me explicaré: dicho brevemente, el teorema de Cantor de los intervalos encajados dice que si tenemos una sucesión de intervalos cerrados y encajados [2], entonces hay al menos un punto que está en todos ellos . Esta es quizá la parte más delicada del teorema. Luego se agrega que si además la medida de los intervalos tiende a cero, entonces hay un solo punto que está en todos esos intervalos. Esta segunda parte es la que nunca se aplica en la prueba que nos ocupa. De todas formas, lo central es la belleza de esta prueba, y no nuestra inquietud.

Proposición. *Los puntos del intervalo* $[0,1]$ *no se pueden numerar* [3]

Prueba. Supongamos lo contrario, o sea que se pueden rotular con los naturales. Digamos entonces que los reales del intervalo $[0,1]$ pueden disponerse en una lista infinita

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

El lector, munido de lápiz y papel, deberá ir reflexionando sobre las siguientes afirmaciones.

1. Es posible encontrar en $[0,1]$ un intervalo cerrado I_1 de longitud menor que $1/2$ tal que $r_1 \notin I_1$.
2. A continuación, podemos elegir dentro de I_1 un intervalo cerrado I_2 con longitud menor que $1/2^2$ al que r_2 no pertenezca.
3. En consecuencia, ni r_1 ni r_2 pertenecen a I_2
   (¿Está usando papel y lápiz?)
4. Nuevamente podemos encontrar un intervalo cerrado I_3 de modo tal que:
5. *i*) $r_1, r_2, r_3 \notin I_3$

---

[1] La matemática: su contenido, métodos y significado, Volumen 3. Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev, Gelfand y otros. Ed. Alianza Universidad.
[2] La palabra “encajado” hace recordar a las muñecas rusas, o matrioshkas, como las que ilustran este artículo. Puedes ir por más buscando en Google “matrioshka” y luego elige la opción “imágenes”.
[3] Queremos evitar palabras como “cardinalidad”, que podrían asustar a un lector no informado.

ii) $I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1$

iii) $|I_3| < \frac{1}{2^3}$

6. Tras unos cuantos pasos, podemos elegir un intervalo cerrado I_n de manera tal que:

   i) $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \notin I_n$

   ii) $I_n \subseteq \ldots \subseteq I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1$ (los intervalos cerrados están encajados)

   iii) $|I_n| < \frac{1}{2^n}$ (de donde la longitud de los intervalos tiende a cero)

7. Siendo los I_n intervalos cerrados, las condiciones *ii*) y *iii*) , junto con el teorema de los intervalos encajados, nos garantizan que debe existir un número real x perteneciente a *todos* los intervalos.
8. Pero por hipótesis, este x debe estar en la lista, o sea debe estar rotulado como r_k para algún natural k, esto es: $x = r_k$.
9. Y allí se presenta la contradicción: tal como fue construido cada intervalo I_k , $x = r_k \notin I_k$, contra el hecho de que x ,por su origen, debe figurar en *todos* los intervalos I_k.

La contradicción proviene de suponer que los reales del intervalo $[0,1]$ podían ser rotulados con los naturales. Por lo tanto la hipótesis inicial según la cual el conjunto de puntos del [0,1] es numerable, es falsa: el intervalo no es numerable, como se quería probar.

Mario Augusto Bunge, para http://www.rinconmatematico.com
Si quieres transmitirnos alguna inquietud generada por este u otro artículo, puedes hacerlo a http://www.rinconmatematico.com/foros