Curso de análise, de Elon Lages Lima, es un libro lleno de atractivos. Vale la pena leerlo. Acá damos una pequeña muestra.

Más matrices de Toeplitz

Problema 1.

Sea T un arreglo de números no negativos

$$\begin{array}{llll} t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3}\dots\dots t_{nm} & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Haga dos hipótesis sobre el arreglo T.
Primera: cada línea tiene suma igual a 1.
Segunda: cada columna tiene límite cero: $\lim_{n\to\infty} t_{ni} = 0$ para todo $i \in N$

Dada una sucesión convergente (x_n), con $\lim x_n = a$, usar el arreglo T para transformarla en una sucesión (y_n), con

$$y_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \dots + t_{nn}x_n .$$

Probar que $\lim y_n = a$.

Sugerencia: Considere inicialmente el caso $a = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in N$ tal que $n > p \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/2$. Existe también $A > 0$ tal que $|x_n| < A$ para todo *n.* A continuación, obtenga $q \in N$ tal que $n > q \Rightarrow |t_{n1}| < \delta, \dots, |t_{np}| < \delta$ donde $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2pA}$.

Tome $n_0 = \max\{p, q\}$. Observe que $n > n_0 \Rightarrow |y_n| < t_{n1}|x_1| + \dots + t_{np}|x_p| + \dots + t_{nn}|x_n|$, donde la suma de los *p* primeros sumandos no excede $\varepsilon/2$, y la suma de los restantes $n-p$ sumandos no supera $\left(t_{n,p+1} + \dots + t_{nn}\right)\dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego, $|y_n| < \varepsilon$. El caso general se reduce inmediatamente a este.

Los siguientes problemas, salvo numeración, son tomados tal cual se encuentran en el libro mencionado al final.

Problema 2. Si $\lim x_n = a$, poniendo $y_n = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, se tiene $\lim y_n = a$

[*Sugerencia:* use el problema 1.]

Problema 3. Si $\lim x_n = a$, y los x_n son todos positivos, entonces $\lim \sqrt[n]{x_1.x_2....x_n} = a$ [*Sugerencia:* tome logaritmos y aplique el problema anterior.]

Concluya que si $a_n > 0$ y $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

Problema 4. Sea $y_n > 0$ para todo $n \in N$, con $\sum y_n = +\infty$. Si $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$, entonces

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{y_1 + y_2 + ... + y_n} = a.$$

Problema 5. Si (y_n) es creciente y $\lim y_n = +\infty$, entonces

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = a.$$

[*Sugerencia:* use el problema anterior.]

Problema 6. $\lim \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ [*Sugerencia:* use el problema anterior.]

Problema 7. $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)....(2n)} = \frac{4}{e}$ [*Sugerencia:* use el final del problema 3.]

Elon Lages Lima, Curso de análise. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1976
