"Read Euler, read Euler, He is the master of us all." (*Laplace*)

La constante de Euler – Mascheroni

Extraído de "Euler, The master of Us All"
[The Mathematical Association of America]
William Dunham

Teorema. *Existe el* $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]$ *, y este límite es finito.*

Prueba. Sea

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$

y hagamos dos observaciones.

En primer lugar:

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= \left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+2)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right] \\ &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1}-\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}\,dx>0 \end{aligned}$$

porque, como se ve en la Figura 1 , la integral es el área sombreada bajo la hipérbola $y=1/x$ mientras que $1/(n+1)$ es el área rectangular, mayor, que incluye el gráfico de la hipérbola.

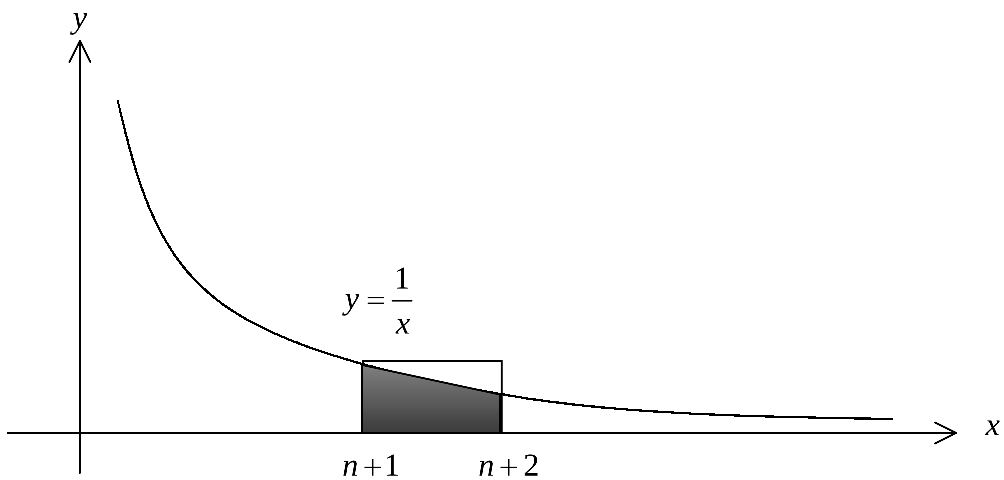

Figura 1

Se sigue que $c_1<c_2<\ldots<c_n<c_{n+1}<\ldots$, así que la sucesión $\{c_n\}$ es creciente.
En segundo lugar, está claro en la Figura 2 que la suma de los bloques rectangulares es menor que la correspondiente área bajo la curva. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \; < \; 1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx \; = \; 1+\ln n \; < \; 1+\ln(n+1)$$

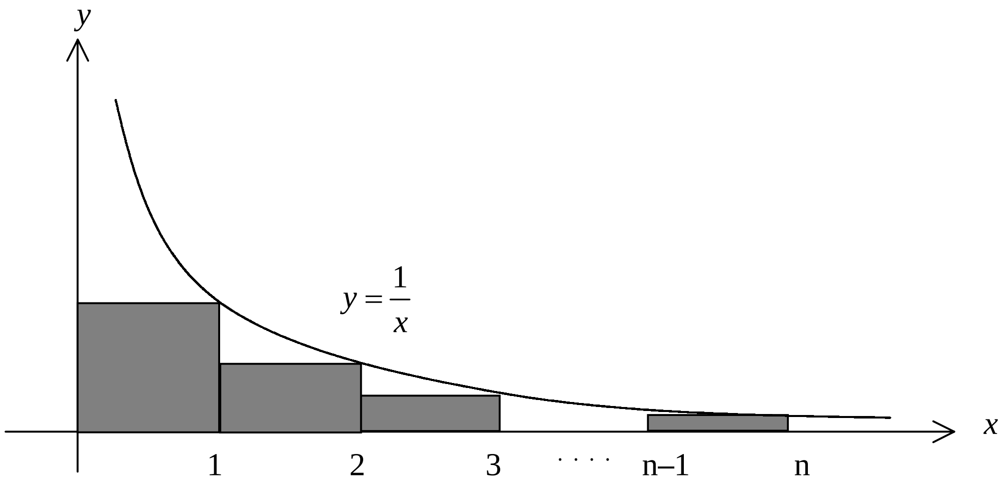

Figura 2

De aquí

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1) \; <1 \quad \text{para todo } n.$$

Juntas, estas observaciones demuestran que $\{c_n\}$ es una sucesión creciente acotada superiormente por 1. La completitud de los números reales garantiza la existencia de $\gamma=\lim_{n\to\infty}c_n$.

Como breve comentario al margen notemos que la definición de la constante de Euler que figura en los textos modernos está ligeramente modificada:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]$$

El cambio del "$\ln(n+1)$" original de Euler, al moderno "$\ln n$" no produce diferencia, porque

$$\begin{aligned}\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+1\right)+\ln\left(n+1\right)-\ln n\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+1\right)\right]+\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \gamma+0=\gamma\end{aligned}$$

Junto con sus primos más conocidos π y e, el número γ figura entre las más importantes constantes de la matemática, y fue señalado por Euler como “digno de seria atención”. Al igual que π y e, γ hace apariciones sorpresivas de tanto en tanto. Es central para una comprensión de la función gamma en análisis avanzado, y figura en formulas bellas aunque peculiares como las siguientes tres:

$$\gamma=-\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\ln x\,dx \qquad \gamma=\left[\frac{1}{2.2!}-\frac{1}{4.4!}+\frac{1}{6.6!}-...\right]-\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \gamma=\lim_{x\to1^{+}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{x}}-\frac{1}{x^{n}}\right)$$

exhibiendo esta última una deliciosa simetría en x y n.

Como tantas ideas profundas en matemática, la constante de Euler ha sido reacia a entregarnos todos sus secretos.
Por ejemplo, el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), en un trabajo titulado *Adnotationes ad calculum integrale Euleri*, computó γ con la impresionante exactitud de 32 lugares. Unos pocos años más tarde, Johan Georg von Soldner (1776-1833) publicó un valor de γ que difería del de Mascheroni en el vigésimo lugar decimal, algo que creó una situación levemente embarazosa. Nada menos que el matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) solicitó a un tercer individuo, un tal F.B.G. Nicolai (1793-1846), al que describió como "un calculador infatigable", que resolviera el asunto. Eso fue lo que hizo Nicolai, determinando 40 decimales de la constante, demostrando así que von Soldner tenia razón y que Mascheroni estaba equivocado.

Esta mini-crisis sobre la aproximación de una constante bien definida nos recuerda cuán lejos hemos llegado. Cuando las computadoras calculan rutinariamente unos pocos centenares de millones de lugares de π , una discrepancia en el vigésimo lugar de gamma parece casi risible.

A propósito, fue Mascheroni quien introdujo el símbolo γ para este número especial. A pesar de que lo había calculado mal, γ es a veces conocida como la constante de Euler-Mascheroni. A la luz de las circunstancias, parece injusto que el nombre de Mascheroni haya sido gloriosamente unido al de Euler con un guión.

El misterio más perdurable acerca de la constante de Euler es también fundamental: ¿γ es racional o irracional? Euler mismo dijo que era "una cuestión de gran importancia" la caracterización de este número. Sin embargo el problema básico de su racionalidad / irracionalidad ha desafiado hasta hoy a la comunidad matemática. Continúa siendo un problema no resuelto.

Esto ocurre a pesar del hecho que todo el mundo *sabe* cuál será la respuesta. Algo tan complicado como γ no está cerca de ser un número racional, una simple fracción con la expansión decimal repetida. Pero, si su irracionalidad está universalmente sospechada, jamás ha sido probada. Al igual que la existencia de números perfectos impares, la irracionalidad de γ es un digno desafío para cualquiera que sueñe con alcanzar la inmortalidad matemática.

Los potenciales aspirantes, sin embargo, deben estar advertidos: este problema ha derrotado a algunas de las mentes más lúcidas de los últimos siglos, y seguramente hay caminos más fáciles para hacerse famoso.

William Dunham

Preparado por Mario Augusto Bunge para http://www.rinconmatematico.com
Traducción de Leonardo O. Aiello.